

UN ESTUDIO SOBRE LA EXACTITUD
DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.
APLICACION A LA BARRA RECTA DE SECCION VARIABLE
BAJO ESFUERZOS AXILES.

AVELINO SAMARTÍN QUIROGA.

SANTANDER NOVIEMBRE 1980.

INDICE

Un estudio sobre la exactitud del método de los elementos finitos. Aplicación a la barra recta de sección variable bajo acciones axiales.

1. Introducción.....	4
2. Análisis del método de los elementos finitos.....	8
2.1. Método de la matriz de rigidez.....	8
2.2. Criterios de convergencia.....	15
3. La barra recta de sección variable bajo acciones axiales.....	19
3.1. Importancia del estudio.....	19
3.2. Matriz de rigidez.....	20
3.3. Solución inicial.....	26
3.4. Aplicación.....	29
4. Elementos simples de dos nudos con funciones de forma lineales a trozos.....	33
4.1. Un tramo único lineal.....	33
4.2. Elementos con funciones de forma lineales a trozos. Dos intervalos iguales.....	39
4.3. Elemento con funciones de forma lineales a trozos. Dos intervalos desiguales.....	40
4.4. Elemento con funciones de forma lineales a trozos. N-1 intervalos iguales.....	45
4.5. Elemento con funciones de forma lineales a trozos. N-1 intervalos desiguales.....	50

5. Elementos simples de dos nudos con funciones de forma no lineales.....	56
5.1. Casos patológicos.....	56
5.1.1. Funciones parabolicas convexas.....	59
5.1.2. Funciones parabolicas concavas.....	62
5.1.3. Funciones parabolicas con concavidad <u>dis</u> tinta.....	63
5.1.4. Funciones parabolicas-lineal a trozos.....	66
5.2. Funciones parabolicas.....	71
6. Elementos con tres grados de libertad.....	74
6.1. Obtención de elementos simples de dos nudos. <u>Con</u> densación estática.....	74
6.2. Elemento con dos nudos. Hiperelemento.....	76
6.3. Elementos con tres nudos.....	78
6.3.1. Grado de libertad intermedio esencial. <u>Nu</u> do central.....	79
6.3.2. Grado de libertad intermedio esencial. <u>Nu</u> do arbitrario.....	80
6.3.3. Grado de libertad intermedio no esencial..	81
7. Elementos con N grados de libertad.....	86
7.1. Elementos en dos nudos. (Hiperelementos).....	87
7.2. Elementos con $K(2 < K < N)$ nudos. Hiperelementos.....	93
7.3. Elementos con N nudos.....	99
8. Elementos compuestos.....	102
8.1. Subelementos simples.....	105

8.2. Subelementos hiperelementos condensados.....	106
8.3. Fórmulas generales.....	108
8.4. Subelementos hiperelementos.....	111
9. Elementos especiales.....	115
10. Conclusiones.....	124

1. INTRODUCCION

La aparición del computador electrónico digital ha supuesto en el Cálculo de Estructuras, al igual que en numerosas áreas de la actividad científica, una revolución extraordinaria. Una consecuencia importante ha sido el surgimiento del método de los elementos finitos, hace más de veinticinco años (1). Inicialmente este método se consideró específico para la resolución de problemas del análisis estructural. Es bien conocido, el estado de entonces del Cálculo matricial de estructuras de barras, y su exigencia de ampliación natural hacia otros elementos estructurales de un número mayor de dos nudos. Estos intentos de generalización, unidos a la inmensa capacidad de computación que comenzaba a emerger, han permitido el nacimiento del método de los elementos finitos en el proceso de resolución de un problema estructural, concretamente, en la Ingeniería Aeronáutica. Desde entonces, el progreso del método ha sido impresionante, abandonando el localismo estructural de sus inicios y constituyendo actualmente una importante herramienta para el estudio de problemas de campos matemáticos, que permiten modelar una gran variedad de fenómenos físicos. Los fundamentos matemáticos del método están, en la actualidad, bien establecidos (2) y existen numerosas variaciones y planteamientos como, por citar sólo algunos, las técnicas de las funciones pesantes (Galerkin, colocación

mínimos cuadrados, etc.); procedimientos semianalíticos -- (bandas finitas, lajas y prismas finitos, etc.), y el bien conocido método de los elementos de contorno. Una revisión de estas posibilidades puede verse en (3).

El objetivo de este artículo se centra en la formulación clásica del método de los elementos finitos y, -- dentro de ella, únicamente en un aspecto todavía no bien - estudiado: su exactitud.

Son bien conocidas las condiciones que deben de satisfacer las funciones de forma y, a veces, la configuración de la malla de elementos para alcanzar la conver-- gencia simple o monotónica. Sin embargo, no existe actual-- mente una teoría, suficientemente establecida que permita medir la eficiencia computacional^(*) y, por lo tanto, comparar objetivamente distintos elementos de una librería de elementos finitos. Probablemente esta eficiencia com-- putacional no deba ser evaluada en el elemento aislado, o en constelaciones indefinidas de elementos idénticos, sino en una configuración de malla real, para resolver un pro-- blema estructural específico. Se comprende el número de pa-

(*)NOTA: Se define en este contexto como eficiencia compu-- tacional la relación de la exactitud de los resul-- tados (inverso del error) al esfuerzo del cálculo. La exactitud puede referirse a uno o varios resul-- tados, obtenidos en uno o varios puntos.

rámetros, que están implicados en este estudio; algunos de ellos se relacionan a continuación:

- 1) Características de las funciones de forma, entre los que se pueden mencionar:

- El orden de continuidad interior (funciones a -- trozos, como el elemento triangular de Clough y Felippa (5) o exterior (hiperelementos).
- El grado de las funciones polinómicas que se utilizan.
- Completud de los polinomios (6).

- 2) Tipo de elementos, en sus distintos aspectos: topológico (triangulares, rectangulares, tetraédricos, etc.); de dimensionalidad (mono, bi o tridimensionales); geométrico (isoparamétricos, proporciones entre caras o lados, etc.).

- 3) Configuración de la malla, tanto en el tipo de conexión y secuencia de elementos como en la distribución de dimensiones entre ellos.

- 4) Clase de resultados que se consideran. En particuu

lar, puntos donde se evalúan dichos resultados -- (centros de gravedad, nudos o puntos de Gauss) y técnica de obtención de los mismos (directa, promedio, extrapolación, etc.). También, el resultado específico que se analiza (fechas, derivadas - de éstas o esfuerzos, que implican derivación de orden superior).

- 5) Acciones (concentradas, distribuidas); condiciones de contorno (eseciales, naturales, mixtas); clase de continuidad del contorno; y variaciones geométricas (espesores, cantos, etc.) de la estructura.
- 6) Procedimientos numéricos y de discretización utilizados; en especial, se hace referencia a las modernas técnicas de integración reducida y selectiva de las matrices de rigidez y cargas equivalentes en los elementos, cuyos resultados en la eficiencia computacional son espectaculares. Métodos de ensamblaje y resolución del sistema (solución frontal, eliminación de Gauss, etc.), si bien ya estos últimos, como en general la organización de todo el análisis, caen dentro del dominio de las disciplinas informáticas que, a pesar de ser importantes "per se", no son objeto de este estudio.

En opinión del autor, la complejidad de este estudio, en el estado actual de conocimientos, motiva que -- aquel no sea susceptible de un planteamiento general. Por esta razón, ha parecido conveniente la consideración de un caso estructural muy simple -la columna de sección variable-, correspondiente a un problema en elementos finitos -de clase C^0 , que, sin embargo, permite, por un lado, su ex tensión a situaciones estructurales análogas (problemas de torsión, membranas de revolución, bandas finitas, etc.), - sin apenas modificación conceptual, y, por otra parte, apor tar indicaciones sobre las posibilidades de llevar a cabo un análisis paralelo en elementos y estructuras más complejos, bien en mayor dimensión (estructuras 2-D y 3-D), bien en requerimientos de continuidad más elevada (estructuras de flexión, tipo C^1 , etc.).

2. ANALISIS DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

2.1. Método de la matriz de rigidez

Se suponen conocidos los fundamentos y etapas - fundamentales del método de los elementos finitos en su - formulación de rigidez. A estos efectos, puede verse el - capítulo 2 de la publicación (7). Aquí sólo se comenta, -

muy brevemente el método de la rigidez directa.

Las ecuaciones de equilibrio de los nudos de un sistema estructural pueden ser deducidos de diferentes modos. En cualquier caso, se llega a un sistema lineal de ecuaciones (*) del siguiente tipo:

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad \{2.1\}$$

en donde

K es la matriz de rigidez general de la estructura.

U un vector que contiene todos los movimientos de los nudos.

P un vector de fuerzas generalizadas actuando en los nudos.

La ecuación matricial {2.1} indica que la suma de las fuerzas interiores, K U (expresada en función de los movimientos de los nudos), es igual a las fuerzas generalizadas, P.

(*) NOTA: Se suponen estructuras lineales, es decir, con pequeños movimientos y deformaciones y material elástico y hookeano.

La matriz de rigidez \underline{K} se obtiene como suma directa de las matrices de rigidez de cada elemento, es decir

$$\underline{K} = \sum \underline{K}_m \quad \{2.2\}$$

Para un elemento típico m , la matriz de rigidez se obtiene mediante la expresión:

$$\underline{K}_m = \int_{vol} \underline{B}_m^T \underline{D}_m \underline{B}_m dV_m \quad \{2.3\}$$

en donde la integral está extendida al volumen del elemento (área o longitud, en el caso de idealizaciones 1-D y 2-D, que implican una integración previa).

Las ecuaciones constitutivas del elemento -relaciones entre tensiones y deformaciones- toman la forma:

$$\underline{\sigma}_m = \underline{D}_m \underline{\epsilon}_m + \underline{\sigma}_{om} \quad \{2.4\}$$

en donde

$\underline{\epsilon}_m$ son las deformaciones en el elemento debidas a los movimientos \underline{U}_m y $\underline{\sigma}_{om}$ representa el vector de tensiones iniciales en el elemento antes de la deformación.

Las deformaciones dentro del elemento pueden ser evaluadas por una ecuación del tipo

$$\underline{\varepsilon}_m = \underline{L} \underline{U}_m (x, y, z) \quad \{2.5\}$$

con \underline{L} un operador diferencial cuyo orden m define la clase de problema C^{m-1} a estudiar.

$\underline{U}_m (x, y, z)$ son los movimientos \underline{U} en el punto x, y, z del elemento.

El procedimiento en elementos finitos realiza la - aproximación en el campo de movimientos básicos dentro del elemento, según la siguiente expresión:

$$\underline{u}_m (x, y, z) = \underline{N}_m \underline{U} \quad \{2.6\}$$

siendo \underline{N}_m las funciones de interpolación o de forma del - elemento.

La ecuación {2.5}, al introducir la {2.6}, se - transforma en la siguiente:

$$\underline{\epsilon}_m = \underline{B}_m \underline{U} \quad (*)$$

con

$$\underline{B}_m = \underline{L} \underline{N}_m \quad \{2.8\}$$

Las fuerzas generalizadas \underline{P} se obtiene como suma directa de los tres vectores siguientes:

- a) \underline{R} : vector de fuerzas concentradas en los nudos.
- b) \underline{T} : vector de fuerzas en los nudos, equivalentes a - una distribución superficial de tensiones sobre los elementos. Se expresan como suma de las fuer-
zas de contorno en el elemento, es decir:

$$\underline{T} = \sum \underline{T}_m$$

siendo

$$\underline{T}_m = \int_{\text{Area}} \underline{N}_m^T t_m dS_m \quad \{2.9\}$$

(*) NOTA: Conviene observar que \underline{B} corresponde a una matriz de elevada dimensión, puesto que contiene todos los grados de libertad de la estructura. Sin embargo, dentro de un programa de computador, únicamente sus términos no nulos y sus posiciones se conservan dentro del mismo. La ventaja de esta notación es que la suma directa de las matrices \underline{K} , - dada por la ecuación {2.2} es correcta, sin necesidad de recurrir al concepto (8) de suma booleana.

y

\underline{t}_m son las tensiones superficiales sobre el elemento m.

La relación entre los movimientos de la superficie del elemento, \underline{u}_m , y los movimientos en los nudos viene expresada por la ecuación:

$$\underline{u}_m(S) = \underline{N}_m \underline{U}$$

c) \underline{F} : vector de cargas generalizadas, producidas por las tensiones iniciales $\underline{\tau}_m$, y cuya expresión es:

$$\underline{F} = \sum \underline{F}_m$$

con

$$\underline{F}_m = \int_{Vol} \underline{N}_m^T \underline{\tau}_m dV_m \quad \{2.10\}$$

Las condiciones de sustentación (apoyos) implican la imposición de movimientos conocidos en determinados nudos, en los que, por lo tanto, las fuerzas actuantes son desconocidas (reacciones). Una forma de considerar estas condiciones de sustentación consiste en particionar la ecua

ción {2.1} como sigue:

$$\begin{aligned} \underline{K}_{aa} \underline{U}_a + \underline{K}_{ab} \underline{U}_b &= \underline{P}_a \\ \underline{K}_{ba} \underline{U}_a + \underline{K}_{bb} \underline{U}_b &= \underline{P}_b \end{aligned} \quad \{2.11\}$$

en donde

\underline{P}_a son cargas especificadas en los nudos.

\underline{P}_b son cargas desconocidas en los nudos (reacciones)

\underline{U}_a son los movimientos desconocidos de los nudos.

\underline{U}_b son los movimientos especificados de los nudos.

Teóricamente, la resolución de {2.11} es inmediata, pues basta escribir el primer grupo de ecuaciones como se indica a continuación:

$$\underline{K}_{aa} \underline{U}_a = \underline{P}_a - \underline{K}_{ab} \underline{U}_b = \underline{P}_a^* \quad \{2.12\}$$

en donde \underline{P}_a^* puede calcularse directamente y, por lo tanto, \underline{U}_a puede obtenerse de la ecuación {2.12}.

Introduciendo \underline{U}_a en la segunda ecuación matricial de {2.11}, se deducen las reacciones \underline{P}_b .

Desde un punto de vista de programación, existen diferentes técnicas de introducción de las condiciones de apoyo, tales, como la adición de rigideces ficticias a la estructura, para coaccionar el correspondiente grado de libertad (componente del movimiento), que son mucho más eficientes que la que se acaba de comentar..

2.2. Criterios de convergencia

El método de los elementos finitos ha sido fundamentado en una base matemática firme, comprobándose su íntima relación con la técnica de minimización directa de - funcionales, debida a Ritz (9).

La aplicación del método de los elementos finitos es válida(*) únicamente si una serie de condiciones - se satisfacen:

Las funciones de interpolación, definidas por - la ecuación {2.6}, evidentemente deben de cumplir:

(*) NOTA: Válida se refiere, en este apartado, en un sentido laxo, a la propiedad de convergencia en la energía considerando una serie minimizante de Ritz. La monotonía o no de esta convergencia se comenta más - adelante.

$$N_i \{x_j, y_j, z_j\} = \delta_{ij} \quad (\text{delta de Kronecker})$$

Por otra parte, si en la ecuación {2.7} se supone que la estructura se desplaza según un movimiento de sólido rígido, las deformaciones $\underline{\varepsilon}_m$ en cada elemento deben de ser nulas lo que implica una serie de condiciones para las matrices \underline{B}_m y, por lo tanto, para las funciones de forma.

Como en el método de los elementos finitos se estudia la convergencia mediante comparación de resultados obtenidos en mallas sucesivas, en las que cada una está contenida en las siguientes, (*) es importante que las matrices \underline{B}_m satisfagan (al menos en el límite, cuando el elemento tiende a volumen nulo) la siguiente propiedad de deformación constante: Es posible, mediante selección conveniente de los movimientos \underline{U} de la estructura, obtener un estado de deformación constante arbitrario, $\underline{\varepsilon}_m$, en el elemento. Esta condición restringe la libertad de elección de las funciones de forma \underline{N}_m , puesto que éstas se encuentran relacionadas con las matrices \underline{B}_m por medio de {2.8}.

*) NOTA: Se puede conseguir esta serie de mallas minimizante, en el método de los elementos finitos, por subdivisión de la malla precedente (que constituya la técnica natural en este método) o por incremento del grado de los polinomios de las funciones (hiperelementos y elementos a trozos).

Por otra parte, las condiciones de continuidad - (compatibilidad) de la estructura exigen que las funciones de forma, N_m , sean tales que la ecuación {2.8} sea admisible es decir, N_m deben de ser de clase C^{m-1} (continuidad de las derivadas de orden $m-1$).

Si los anteriores requerimientos de continuidad existen en los nudos del elemento -adoptando como incógnitas básicas U , los movimientos y sus $m-1$ primeras derivadas-, éste se denomina simple. En el caso de que se exista en los nudos una continuidad superior o inferior a la estricta, el elemento se suele llamar hiper o hipoelemento, respectivamente.

Sin embargo, la continuidad a lo largo de los - lados -en los elementos bidimensionales o superficiales- o de las caras -en los elementos tridimensionales o volumétricos- puede ser menor que C^{m-1} , y los elementos seguir siendo convergentes para ciertos tipos o configuraciones de mallas. Estos elementos se llaman incompatibles o no conformes. Si existe una continuidad C^{m-1} a lo largo de los lados o caras del elemento, éste es siempre convergente, - independientemente de su disposición dentro de una malla y se llama elemento conforme o compatible. Además, la convergencia en energía de estos elementos es siempre monótonica, disminuyendo el error en la energía desde valores - superiores.

De la exposición anterior, no se deduce necesariamente que los elementos conformes sean más eficientes y -- exactos que los que no lo son. Existen numerosos ejemplos, en este sentido, entre los que puede citarse el publicado por King y otros (10), correspondiente a la flexión de plcas. No obstante, la utilización de elementos no conformes exige la comprobación adicional de su convergencia dentro, de la malla. Un modo **simple de realizar** esta comprobación ha sido expuesto por Irons (4) y se denomina "patch test".

En resumen, se puede afirmar que el estado actual del método de los elementos finitos es aceptable desde un punto de vista de conocimiento de los criterios de convergencia. No obstante, los escasos resultados actuales en relación con la eficiencia y comparación de la -- exactitud entre distintos tipos de elementos son escasos. La mayoría de ellos son poco adecuados para su aplicación, ya que exigen el conocimiento de parámetros no accesibles "a priori" al realizador de un cálculo en elementos finitos, tales como los autovalores de la matriz de rigidez K de la estructura.

Como se ha indicado en el apartado 1, la complejidad de un estudio sobre criterios de velocidad de convergencia es elevada, por lo que un análisis referido a uno de

los elementos más simples ha parecido de interés, como primera aproximación al tema.

3. LA BARRA RECTA DE SECCION VARIABLE BAJO ACCIONES AXILES

3.1. Importancia del estudio

La columna constituye una estructura monodimensional (1-D) recta, y representa un problema de clase C: En efecto, el operador L de la ecuación {2.5}, que relaciona deformaciones con movimientos, es $L = \frac{d}{dx}$, es decir, se tiene por definición:

$$\epsilon = \frac{du}{dx}$$

A pesar de ser el elemento estructural más simple, su utilidad es grande ya que aparece en el estudio, mediante elementos finitos, de membranas de revolución, y, en el método de las bandas finitas, en el estudio de membranas. En ambos casos, el operador L se define como sigue:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 \\ \frac{\sin\psi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\cos\psi}{r} \\ \frac{\partial}{r \partial \theta} & \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin\psi}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \{3.1\}$$

siendo u , v y w los movimientos de un punto genérico en las direcciones r , θ y z del elemento recto inclinado un ángulo ψ respecto al eje vertical de revolución (o giro, en las bandas finitas), z . Las coordenadas polares son r y θ . La longitud del elemento es s .

El operador L es, evidentemente, de la clase C^2 . Mediante un desarrollo en serie de Fourier, del tipo:

$$u = u_0 \cos \lambda_n \theta + u_1 \operatorname{sen} \lambda_n \theta$$

$$v = v_0 \operatorname{sen} \lambda_n \theta + v_1 \cos \lambda_n \theta$$

$$w = w_0$$

con $\lambda_a = \frac{n}{2}$ ó $\lambda_n = \frac{n\pi}{\alpha}$, según el caso, se reduce el problema a una dimensión (estructuras 1-D).

En los siguientes apartados, se estudia la columna de sección variable, y, en particular, la matriz de rigidez y las cargas equivalentes (solución inicial), con objeto de obtener la solución exacta que permita comparar los distintos tipos de elementos finitos.

3.2. Matriz de rigidez

Sea el problema de la barra recta 1-2, a extensión, de la figura 3.1. Se supone que es la longitud l y

sección $A(x)$, variable con la abscisa x . La determinación de la matriz de rigidez k se puede llevar a cabo, dentro de la teoría elástica y lineal, mediante la resolución de los siguientes problemas de contorno:

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \frac{du}{dx} \right\} = 0, \quad \text{para } x \in (0,1). \quad \{3.1\}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 & \text{para } x &= 0^{(*)} \\ u &= u_2 & \text{para } x &= 1 \end{aligned} \quad \{3.2\}$$

$$EA \frac{du}{dx} = -p_1 \quad \text{para } x = 0 \quad \{3.3\}$$

$$EA \frac{du}{dx} = p_2 \quad \text{para } x = 1$$

en donde u_1 y u_2 son los movimientos de los nudos 1 y 2. - Los valores de p_1 y p_2 corresponden a las fuerzas exteriores actuando en los extremos 1 y 2 de la barra.

La solución del problema de contorno constituido por las ecuaciones {3.1} y {3.2} (problema de Dirichlet) - permite obtener la expresión del movimiento $u(x)$ como fun-

(*) NOTA: Se usan minúsculas para los movimientos del elemento, que se recogen en un vector \underline{u} , que constituye una parte del vector \underline{U} de la ecuación {2.1}

ción de u_1 y u_2 , en la forma siguiente:

$$u(x) = \{N_1(x), N_2(x)\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{u} \quad \{3.4\}$$

Se observa que $N_i(x)$ son unas funciones de interpolación, en la nomenclatura del método de los elementos finitos. En realidad, constituyen las funciones de interpolación exactas del problema estructural definido por {3.1} y {3.2}.

Es fácil deducir que las expresiones de estas -- funciones de interpolación exactas, supuesto el módulo de elasticidad E constante, son:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \bar{A} \int_x^1 \frac{d\xi}{A(\xi)} \\ N_2(x) &= \bar{A} \int_0^x \frac{d\xi}{A(\xi)} \end{aligned} \quad \{3.5\}$$

con

$$\bar{A} = \frac{1}{\int_0^1 \frac{dx}{A(x)}}$$

Se observa que N_i satisfacen las condiciones ca-

racterísticas de las funciones de interpolación es decir

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (\text{delta de Kronecker})$$

$$N_1(x) + N_2(x) = 1$$

El criterio de deformación constante, se cumple asimismo, ya que

$$EA(x) \frac{du}{dx} = E\bar{A}(u_2 - u_1) = (\text{constante arbitraria})$$

En efecto

$$EA(x) \left\{ \frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx} \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = E\bar{A}(u_2 - u_1)$$

Por otra parte, la solución del problema de contorno definido, por las ecuaciones {3.1} y {3.3} (problema de Neuman), tiene solución únicamente cuando $p_1 + p_2 = 0$ (equilibrio de fuerzas). En este caso, la solución no es única, ya que existe la posibilidad de un movimiento de só lido rígido (traslación $u(x) = u_0$ constante).

En efecto, la solución general de {3.1} es:

$$u(x) = C_1 \int_0^x \frac{d\xi}{EA(\xi)} + C_2 \quad \{3.5\}$$

que al imponer {3.3}, resulta:

$$-p_1 = c_1$$

$$p_2 = c_1$$

que exige $p_1 + p_2 = 0$ o bien $-p_1 = p_2 = p$.

$$\text{Por lo tanto, } u(x) = \frac{p}{E} \int_0^x \frac{d\xi}{A(\xi)} + u_0 \quad \{3.6\}$$

Una forma de obtener la matriz de rigidez de la barra consiste, simplemente, en deducir p_1 y p_2 a partir de la solución {3.4}, considerando la definición dada por las ecuaciones {3.3}. Se llega, así, a la expresión:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \{3.7\}$$

$$\text{en donde } k_{11} = -EA(x) \left. \frac{dN_1}{dx} \right|_{x=0} = E\bar{A}$$

$$k_{12} = -EA(x) \left. \frac{dN_2}{dx} \right|_{x=0} = -E\bar{A}$$

$$k_{21} = EA(x) \left. \frac{dN_1}{dx} \right|_{x=1} = -E\bar{A}$$

$$k_{22} = EA(x) \left. \frac{dN_2}{dx} \right|_{x=1} = E\bar{A}$$

es decir
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \bar{k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \{3.8\}$$

con $\bar{k} = EA$.

Una forma alternativa, probablemente más simétrica, de llegar a la matriz de rigidez, y que ha sido utilizada por Samartín y Munro (11) en problemas estructurales más complejos (láminas de traslación), se indica a -- continuación:

La solución general de {3.1} es {3.5}, que particularizada para los valores $x=0$ y $x=1$, conduce a los resultados:

$$u_1 = C_2$$

$$u_2 = EC_1(\bar{A})^{-1} + C_2$$

en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (E\bar{A})^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \underline{G_d} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \{3.9\}$$

Análogamente, la ecuación general {3.5} permite obtener p_1 y p_2 al particularizar $EA \frac{du}{dx}$ para los nudos ex tremos de la barra, obteniéndose:

$$p_1 = - C_1$$

$$p_2 = C_2$$

es decir

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \underline{G}_p \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \{3.10\}$$

La matriz \underline{G}_d es siempre no singular, por lo que, del sistema de ecuaciones {3.9} y {3.10}, pueden eliminarse C_1 y C_2 , y obtener directamente la matriz de rigidez \underline{k} como sigue:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \underline{G}_p \underline{G}_d^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underline{k} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \{3.11\}$$

$$\text{con } \underline{k} = \underline{G}_p \underline{G}_d^{-1}$$

3.3: Solución inicial

Se supone la barra solicitada con una carga distribuida, la intensidad definida por la función $q(x)$, según figura 3.1(b). La posibilidad de cargas aisladas se incluye en esta representación si se considera la extensión de la función $q(x)$ al campo de las funciones generalizadas o distribuciones. En particular, la carga aislada, en el punto x_0 de intensidad Q , puede ser definida por la distribución de Dirac, así

$$q(x) = Q \cdot \delta(x-x_0)$$

con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) dx = 1$$

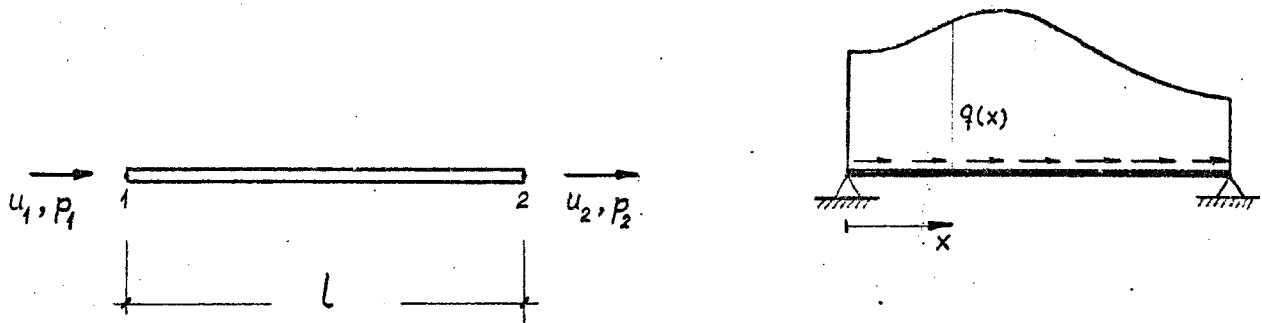
$$\text{y} \quad \delta(x-x_0) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \neq x_0$$

La obtención de las cargas p_1^0 y p_2^0 , actuando en los extremos de la barra, y equivalentes a $q(x)$, se deducen de la resolución del problema

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \frac{du}{dx} \right\} = q \quad \{3.12\}$$

$$u = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

$$u = 0 \quad \text{para} \quad x = 1$$



(a) Matriz de rigidez

(b) Solución inicial

Figura 3.1. Barra recta a extensión

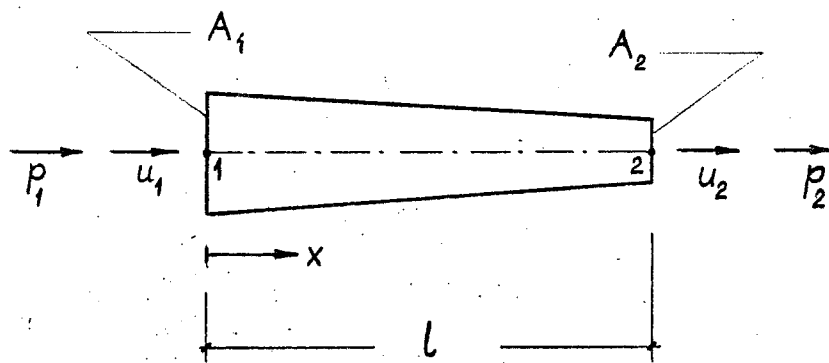


Figura 3.2. Notación

Una solución particular $u = u^0(x)$ de {3.12} es:

$$u^0 = \int_0^x \frac{d\xi}{EA(\xi)} \int_0^\xi q(\eta) d\eta$$

con lo que la solución inicial se obtiene sumándole la general o complementaria {3.5} de modo que las condiciones - de contorno se satisfagan. Resulta de esta forma

$$u = u^0 - \left\{ \int_0^x \frac{d\xi}{EA(\xi)}, 1 \right\} G_d^{-1} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix}$$

siendo

$$u_1^0 = u^0(0) = 0$$

$$u_2^0 = u^0(1) = \int_0^1 \frac{d\xi}{EA(\xi)} \int_0^\xi q(\eta) d\eta$$

Las cargas p^0 en los extremos de las barras, equivalentes a q se obtienen aplicando las fórmulas {3.3} y son:

$$\begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^1 q(\xi) d\xi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{12}u_2^0 \\ \int_0^1 q(\xi) d\xi - k_{22}u_2^0 \end{bmatrix} \quad \{3.13\}$$

3.4. Aplicación

Las expresiones {3.11} y {3.13} de la matriz de rigidez y cargas equivalentes pueden ponerse en la siguiente forma:

$$\underline{k} = E\bar{A} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{3.14\}$$

$$\begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{bmatrix} = E\bar{A} \begin{bmatrix} u_2^0 \\ \int_0^1 q(\xi) d\xi - u_2^0 \end{bmatrix} \quad \{3.15\}$$

Ambas fórmulas pueden ser obtenidas utilizando - consideraciones energéticas elementales. Ver, a este respecto (1).

Se considera, a efectos de este análisis, el caso particular de variación lineal de la sección de la columna, es decir, la ley de áreas es (figura 3.2):

$$A(x) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{l} x \quad \{3.16\}$$

en donde A_1 y A_2 son, respectivamente, las áreas en los extremos 1 y 2 de la barra.

Se introduce, por conveniencia, una coordenada adimensional ξ , definida por la fórmula de transformación:

$$x = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

o bien, la inversa

$$\xi = \frac{2x}{1} - 1$$

La ley de variación de áreas se convierte en la -
siguiente:

$$A(\xi) = A(1 + \mu\xi) \quad \{3.17\}$$

con

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} \quad (\text{área media})$$

$$\mu = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \quad (|\mu| \leq 1)$$

Los parámetros A y μ permiten definir la variación de la sección. El coeficiente μ varía entre los valores -1 y 1 . El valor $\mu=0$ corresponde a sección constante.

En lo que sigue, se definirá la matriz de rigidez \underline{k} por un factor \bar{k} de acuerdo con la siguiente igualdad:

$$\underline{k} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{k} \quad \{3.18\}$$

El coeficiente \bar{k} es función de μ únicamente.

De un modo análogo, las cargas, p_1^0 y p_2^0 , equivalentes a una acción de intensidad q , uniforme en toda la luz de la barra, se determinarían mediante el coeficiente \bar{p} , definido según la expresión:

$$\begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{bmatrix} = q l \begin{bmatrix} 1 - \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad \{3.19\}$$

El parámetro \bar{p} es también función únicamente de μ .

Dentro de los apartados siguientes, \bar{k} y \bar{p} , se denominarán parámetros del elemento. Conviene observar que ambos parámetros satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \bar{k}(\mu) &= \bar{k}(-\mu) \\ \bar{p}(\mu) &= 1 - \bar{p}(-\mu) \end{aligned} \quad \{3.20\}$$

Aplicando las fórmulas {3.14} y {3.15} a la columna con variación de sección lineal, dada por la fórmula {3.17} se obtienen los resultados siguientes:

$$\bar{k} = 2\mu \left\{ \log \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \right\}^{-1} \quad \{3.21\}$$

$$\bar{p} = \frac{\mu+1}{2\mu} - \left\{ \log\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \right\}^{-1} \quad \{3.21\}$$

siendo log el logaritmo neperiano.

Los valores de estos parámetros, para distintos coeficientes, μ , de forma de la sección, se representan en la tabla 3.1.

Mediante las expresiones {3.5} se pueden deducir las funciones de forma N_1 y N_2 , correspondientes a esta solución exacta, que son:

$$N_1 = \left\{ \log\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \right\} \left\{ \log\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \right\}^{-1} \quad \{3.22\}$$

$$N_2 = \left\{ \log\left(\frac{1+\mu\xi}{1-\mu}\right) \right\} \left\{ \log\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \right\}^{-1}$$

que se representan en la figura 3.3.

4. ELEMENTOS SIMPLES DE DOS NUDOS CON FUNCIONES DE FORMA LINEALES A TROZOS

4.1. Un tramo único lineal

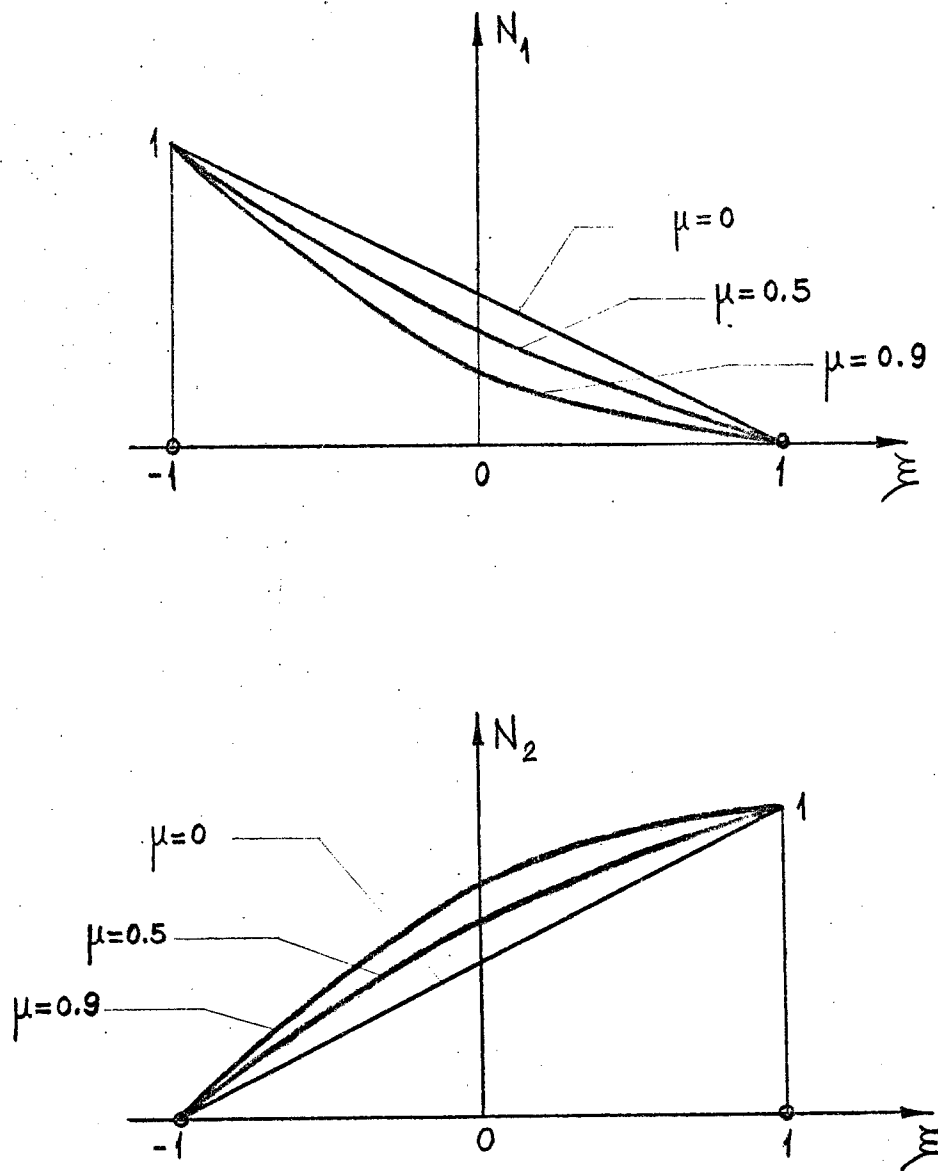


Figura 3.3. Funciones de forma exactas del elemento.

(Tres casos de variación lineal expresados por el coeficiente μ).

Tabla 3.1. Valores de los parámetros del elemento.

Solución exacta.

$$\bar{k} = 2\mu \left\{ \log \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \right\}^{-1}$$

$$\bar{p} = \frac{\mu+1}{2\mu} \left\{ \log \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \right\}^{-1}$$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.969	0.944	0.910	0.866	0.807	0.728	0.611	0.374
\bar{p}	0.500	0.517	0.534	0.551	0.570	0.590	0.612	0.638	0.670	0.716	0.816

Las funciones de forma son (figura 4.1):

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \{4.1\}$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

Constituye un elemento de deformación constante, y la matriz de rigidez, \underline{k} es:

$$\underline{k} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{k}$$

Las cargas equivalentes a una acción distribuida en toda la luz l de la barra, con un intensidad q , son:

$$\underline{p} = ql \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = ql \begin{bmatrix} 1-\bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}$$

En este caso, los factores adimensionales \bar{k} y \bar{p} son los siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= 1 \\ \bar{p} &= 0.5 \end{aligned} \quad \{4.2\}$$

independientes ambos de μ . (Tabla 4.1).

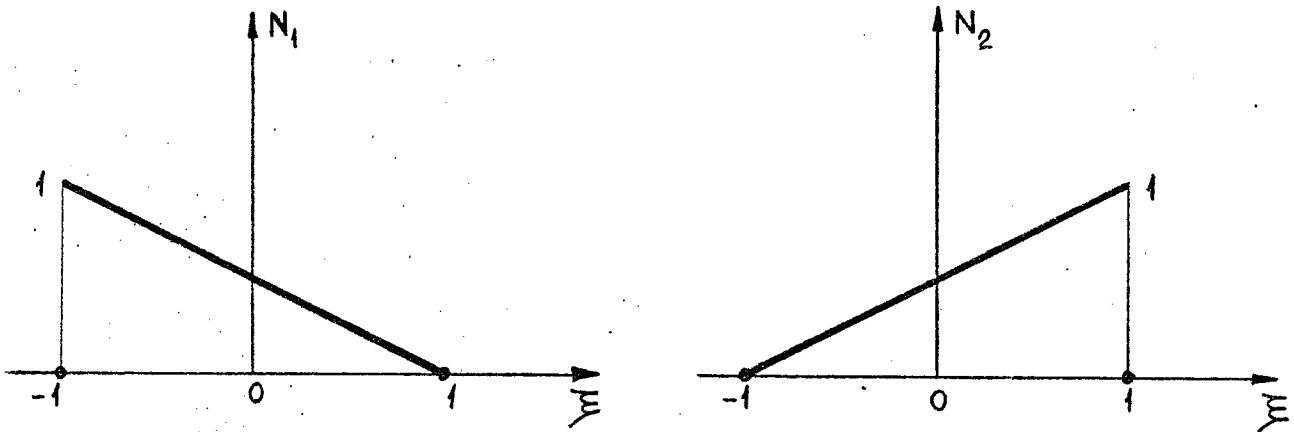


Figura 4.1. Funciones de forma del elemento lineal: 1 tramo

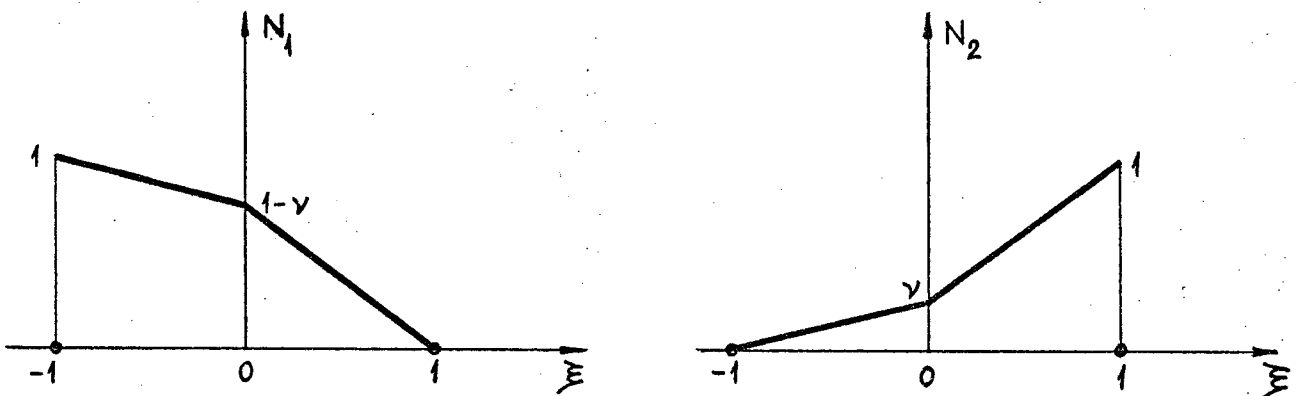


Figura 4.2. Funciones de forma del elemento lineal: 2 tramos iguales

Tabla 4.1. Valores de los parámetros del elemento.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Tramo único.

$$\bar{k} = 1.000 \quad \bar{p} = 0.500$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
\bar{p}	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.003	0.013	0.031	0.056	0.090	0.134	0.193	0.272	0.389	0.626
$\Delta\bar{p}$	0.000	0.017	0.034	0.051	0.070	0.090	0.112	0.138	0.170	0.216	0.316

Tabla 4.2. Valores de los parámetros del elemento.

Elemento simple con funciones de forma lineales. Dos tramos iguales

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{4} \mu^2 \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{8}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.998	0.990	0.978	0.960	0.938	0.910	0.878	0.840	0.798	0.755
\bar{p}	0.500	0.513	0.525	0.538	0.550	0.563	0.575	0.588	0.600	0.613	0.625
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.001	0.003	0.009	0.016	0.028	0.044	0.071	0.110	0.187	0.381
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.004	-0.009	-0.013	-0.020	-0.027	-0.037	-0.050	-0.070	-0.103	-0.291

4.2. Elementos con funciones de forma lineales a trozos.

Dos intervalos iguales

Las funciones de forma son (figura 4.2):

$$N_1 = \begin{cases} (1-\nu)(1+\xi) - \xi & \text{para } \xi \in (-1, 0) \\ (1-\nu)(1-\xi) & \text{para } \xi \in (0, 1) \end{cases} \quad \{4.3\}$$

$$N_2 = \begin{cases} \nu(1+\xi) & \text{para } \xi \in (-1, 0) \\ \nu(1-\xi) + \xi & \text{para } \xi \in (0, 1) \end{cases}$$

con ν un coeficiente arbitrario.

El elemento es de deformación constante en cada uno de los dos subintervalos. Por lo tanto, presenta internamente una discontinuidad en la deformación.

Parámetro de la matriz de rigidez:

$$\bar{k} = 2 - 4\nu + 4\nu^2 + (1+2\nu) \quad \{4.4\}$$

Parámetro de las cargas equivalentes:

$$\bar{p} = \frac{2\nu + 1}{4}$$

Como en el método de los elementos finitos se obtienen rigideces superiores a las exactas, una importante

mejora en el elemento anterior sería elegir el coeficiente ν de modo que el valor de \bar{k} fuera mínimo. En efecto a partir de la condición $\frac{dk}{d\nu} = 0$, se deduce:

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \mu$$

con lo que los parámetros del elemento son:

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{4} \mu^2 \quad \{4.5\}$$

$$\bar{p} = \frac{4 + \mu}{8}$$

Se representan estos valores en la tabla 4.2.

4.3. Elemento con funciones de forma lineales a trozos. Dos intervalos desiguales.

Se denomina λ la abscisa adimensional del nudo - intermedio ($-1 < \lambda < 1$). Las funciones de interpolación son, entonces (figura 4.3)

$$N_1 = \begin{cases} \frac{-\nu}{1+\lambda} (1+\xi)+1 & \xi \in (-1, \lambda) \\ -\frac{1-\nu}{1-\lambda} (\xi-1) & \xi \in (\lambda, 1) \end{cases} \quad \{4.6\}$$

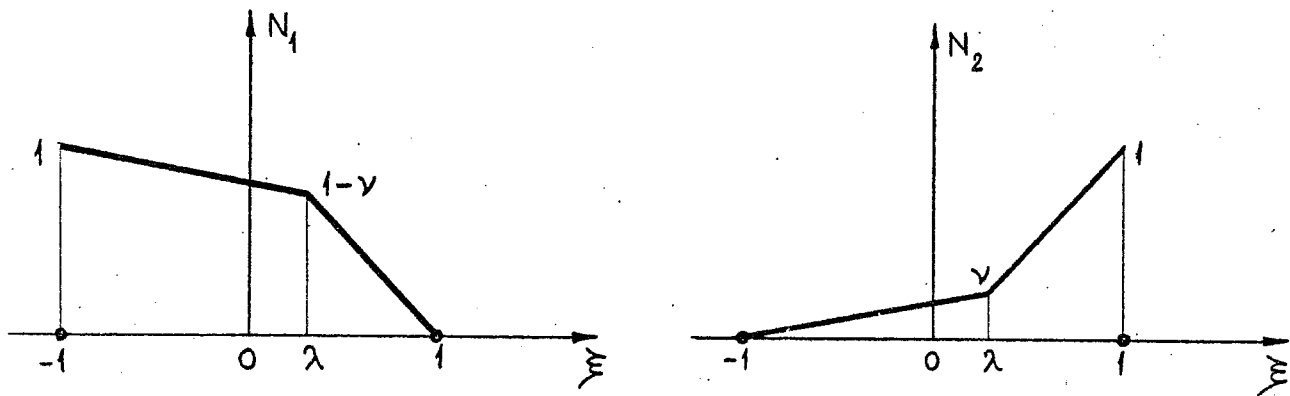


Figura 4.3. Funciones de forma del elemento lineal: 2 tramos desiguales

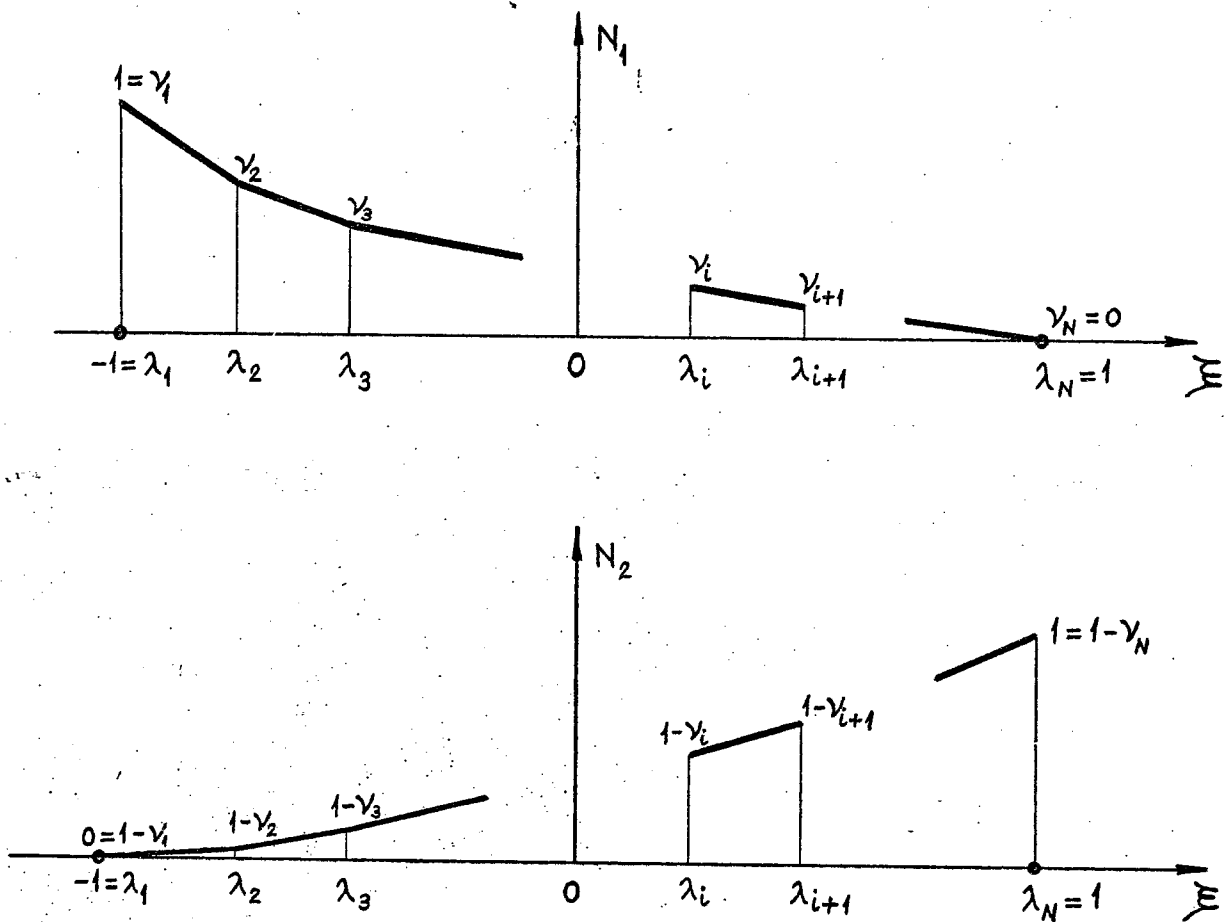


Figura 4.4. Funciones de forma del elemento lineal. N tramos

$$N_2 = \begin{cases} \frac{\nu}{\lambda+1} (1+\xi) & \xi \in (-1, \lambda) \\ \frac{1-\nu}{1-\lambda} (\xi-1)+1 & \xi \in (\lambda, 1) \end{cases} \quad \{4.6\}$$

Este elemento como el anterior, es de deformación constante a trozos. Existe una discontinuidad de la deformación en el punto λ .

Los parámetros del elemento son:

$$\bar{k} = \frac{2 - 4\nu + 4\nu^2}{\lambda + 1} + \mu\{1 - 2\nu + \lambda(1 - 2\nu + 2\nu^2)\}$$

$$\bar{p} = \frac{2\nu + 1 - \lambda}{4} \quad \{4.7\}$$

Por idénticas consideraciones al caso anterior, se puede escribir

$$\frac{\partial k}{\partial \nu} = 0$$

que implica

$$\nu = \frac{(\lambda+1)(2+\mu+\lambda\mu)}{4(1+\mu\lambda)}$$

y por lo tanto, los parametros del elemento son

$$\bar{k} = \frac{(2+\mu\lambda+\mu)(2+\mu\lambda-\mu)}{4(1+\mu\lambda)}$$

{4.8}

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(1-\lambda^2)}{8(1+\mu\lambda)}$$

Se considera altura de todos los elementos con punto de discontinuidad intermedio arbitrario λ y ordenada v elegida de modo que minimice \bar{k} , aquel con una abscisa λ que conduce a un valor de \bar{k} mínimo. Es decir, que satisfice la condición

$$\frac{dk}{d\lambda} = 0$$

con lo que resulta

$$\lambda = \frac{1}{\mu} (\sqrt{1 - \mu^2} - 1)$$

Los valores correspondientes de los parámetros son:

$$\bar{k} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \mu^2})$$

{4.4}

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}{4\mu}$$

Estos valores se representan en la tabla 4.3.

Tabla 4.3. Valores de los parametros del elemento.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Dos tramos distintos.

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \mu^2}) \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{(1 - \sqrt{1 - \mu^2})}{2\mu}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.990	0.977	0.958	0.933	0.900	0.857	0.800	0.718	0.571
\bar{p}	0.500	0.513	0.525	0.538	0.552	0.567	0.583	0.602	0.625	0.657	0.717
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.003	0.008	0.014	0.023	0.034	0.050	0.072	0.107	0.197
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.004	-0.009	-0.013	-0.018	-0.023	-0.029	-0.036	-0.045	-0.059	-0.099

Tabla 4.4. Valores de los parámetros del elemento.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Tres tramos iguales.

$$\bar{k} = 1 - \frac{8\mu^2}{27 - 4\mu^2} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu}{27 - 4\mu^2}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.988	0.973	0.951	0.923	0.887	0.843	0.791	0.727	0.660
\bar{p}	0.500	0.515	0.530	0.545	0.561	0.577	0.594	0.612	0.631	0.652	0.672
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.001	0.004	0.007	0.013	0.021	0.036	0.063	0.116	0.286
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.002	-0.004	-0.006	-0.009	-0.013	-0.018	-0.026	-0.039	-0.064	-0.144

4.4. Elemento con funciones de forma lineales a traves N-1 intervalos iguales

Los valores de las N abscisas estan prefijadas y valen (figura 4.4.):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_i = -1 + \frac{2}{N-1} (i-1) \quad \lambda_N = 1$$

Los v_i ($i=1,2,\dots,N$), ordenadas arbitrarias, estan sometidos a las condiciones:

$$v_1 = 1 \quad \text{y} \quad v_N = 0$$

La expresi3n de las funciones de forma en el intervalo g3nerico $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ es:

$$N_1 = - \frac{v_{i+1} - v_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \xi - \frac{\lambda_{i+1} v_i - \lambda_i v_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} + 1 \quad \{4.10\}$$

$$N_2 = \frac{v_{i+1} - v_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \xi + \frac{\lambda_{i+1} v_i - \lambda_i v_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_i}$$

La deformaci3n de este elemento esta constituida por trozos de valor constante en cada intervalo. Es por lo

tanto de deformación constante discontinua.

Los parametros del elemento son:

$$\bar{k} = (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} - v_i)^2 \left\{ 1 + \mu \left(\frac{2i-1}{N-1} - 1 \right) \right\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} + v_i) \quad \{4.11\}$$

Se puede elegir como valores de las ordenadas v_i , aquellos que minimizan el valor del parámetro \bar{k} , es decir, que satisfacen las condiciones:

$$\frac{\partial k}{\partial v_i} = 0 \quad i = 2, 3, 4, \dots, N-1.$$

Resulta el sistema de ecuaciones:

$$(v_{i+1} - v_i) \left\{ 1 + \mu \left(\frac{2i-1}{N-1} - 1 \right) \right\} - (v_N - v_{N-1}) \left\{ 1 + \mu \frac{N-2}{N-1} \right\} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N-2$$

cuya solución es

$$v_{i+1} = v_i + \frac{a_i}{S}$$

$$\text{con } a_i = \frac{1}{1-\mu + \frac{2i-1}{N-1} \mu}$$

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} a_i$$

Los parametros del elemento, en este caso, son:

$$\bar{k} = \frac{N-1}{S}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{N-1} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N-i}{a_i} \right\} \quad \{4.12\}$$

Las formulas anterior se puede particularizar para diferentes valores de N, resultando:

N=2 (dos intervalos)

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2}{4}$$

{4.13}

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{8}$$

que son valores ya obtenidos, en el apartado anterior.
N=4 (tres intervalos)

$$\bar{k} = 1 - \frac{4\mu^2}{27 - 4\mu^2} \quad \{4.14\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu}{27 - 4\mu^2} \quad \{4.14\}$$

En la tabla 4.4 se obtienen valores numericos de estos parametros..

N = 5 (cuatro intervalos).

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(5-9\mu^2)}{16 - 5\mu^2} \quad \{4.15\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(5-9\mu^2)}{2(16-5\mu^2)}$$

En la tabla 4.5 se deducen valores numéricos de estos parametros.

N = 6 (cinco intervalos).

$$\bar{k} = 1 - \frac{8\mu^2(125 - 32\mu^2)}{3125-1500\mu^2+64\mu^4} \quad \{4.16\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu(125 - 32\mu^2)}{3125-1500\mu^2+64\mu^4}$$

Estos valores se representan en la tabla 4.6.

N = ∞ (infinitos intervalos).

Se tiene en el limite, aplicando el concepto de integral

$$S_N = \sum_{i=1}^{N-1} a_i = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{1-\mu + \frac{2i-1}{N-1} \mu} = \frac{N-1}{2\mu} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\frac{1-\mu}{2\mu} + \frac{2i-1}{2(N-1)}} \frac{1}{N-1}$$

Tabla 4.5. Valores de los parámetros del elemento.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Cuatro tramos iguales

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(5 - 9\mu^2)}{16 - 5\mu^2} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(5 - 9\mu^2)}{16 - 5\mu^2}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.988	0.976	0.963	0.953	0.955	0.979	1.038	1.155	1.337
\bar{p}	0.500	0.516	0.531	0.542	0.547	0.546	0.535	0.514	0.520	0.569	0.630
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.001	0.007	0.019	0.043	0.089	0.172	0.310	0.544	0.963
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.001	-0.003	-0.009	-0.023	-0.044	-0.077	-0.124	-0.150	-0.147	-0.186

Tabla 4.6. Valores de los parámetros del elemento.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Cinco tramos iguales

$$\bar{k} = 1 - \frac{8\mu^2(125 - 32\mu^2)}{3125 - 1500\mu^2 + 64\mu^4} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu(125 - 32\mu^2)}{3125 - 1500\mu^2 + 64\mu^4}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.971	0.947	0.915	0.874	0.822	0.756	0.671	0.572
\bar{p}	0.500	0.516	0.532	0.512	0.566	0.585	0.605	0.627	0.653	0.683	0.716
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.002	0.003	0.005	0.008	0.005	0.028	0.060	0.198
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.001	-0.002	-0.039	-0.004	-0.005	-0.007	-0.011	-0.017	-0.033	-0.100

es decir

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{N-1}{2\mu} \int_0^1 \frac{dx}{\frac{1-\mu}{2\mu} + x} = \frac{N-1}{2\mu} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}$$

Por lo tanto, resulta:

$$\bar{k} = 2\mu \{ \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \}^{-1}$$

$$\bar{p} = \frac{\mu+1}{2\mu} - \{ \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \}^{-1}$$

que corresponden a los resultados exactos, obtenidos en el límite mediante elementos finitos con funciones de interpolación lineales a trozos. (Tabla 3.1).

4.5. Elemento con funciones de forma lineales a trozos. N-1 intervalos desiguales

El elemento del apartado anterior puede ampliarse si se supone que la posición de las abscisas λ_i de los puntos de cambio de la derivada de la función de forma es arbitraria. De este modo, se puede proceder con los valores de λ_i como variables, que se determinaran con una condición de mínimo.

De un modo analogo, al caso anterior, los parametros del elemento son:

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \{2 + \mu(\lambda_i + \lambda_{i+1})\} \quad \{4.17\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) (v_{i+1} + v_i)$$

Las expresiones anteriores, pueden modificarse si se introducen las nuevas variables:

$$\Delta v_i = v_{i+1} - v_i \quad i=1,2,\dots,N-1$$

$$\Delta \lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$$

que satisfacen la condición

$$\sum_{i=1}^{N-1} \Delta v_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \Delta \lambda_i = 2$$

siendo $v_1 = 1$, $v_N = 0$, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_N = 1$ valores especificados.

Se comprende que solo existen $N-2$ variables independientes de cada grupo $(\Delta v_i \text{ y } \Delta \lambda_i)$.

Se pueden seleccionar Δv_i de modo que \bar{k} alcance un valor mínimo, es decir, que satisfagan el conjunto de condiciones:

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial v_i} = 0 \quad \text{con } i=1,2,3,\dots,N-2$$

con lo que resulta el sistema

$$\frac{\Delta v_i}{\Delta \lambda_i} \{2 + \mu(\lambda_{i+1} + \lambda_i)\} = \text{constante} \quad i=1,2,3,\dots,N-1$$

cuya solución es

$$\Delta v_i = \frac{a_i}{S}$$

siendo

$$a_i = \frac{\Delta \lambda_i}{2 + \mu(\lambda_{i+1} + \lambda_i)}$$

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} a_i$$

El valor mínimo del parámetro \bar{k} es:

$$\bar{k} = \frac{1}{S}$$

{4.18a}

El parámetro \bar{p} de las cargas equivalentes, toma el valor siguiente:

$$\bar{p} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \Delta \lambda_i \{ \Delta v_i + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \Delta v_j \} \quad \{4.18b\}$$

A su vez, los intervalos $\Delta \lambda_i$ pueden elegirse de modo que \bar{k} se mínimo, o lo que es equivalente, S máximo. - Al derivar, resulta el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\frac{1}{2(1-\mu) + \mu(\Delta \lambda_i + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \Delta \lambda_j)} - \frac{\mu \Delta \lambda_i}{\{2(1-\mu) + \mu(\Delta \lambda_i + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \Delta \lambda_j)\}^2}$$

$$- 2\mu \Delta \lambda_i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\{2(1-\mu) + \mu(\Delta \lambda_i + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \Delta \lambda_j)\}^2} = \text{constante}$$

$$i=1, 2, \dots, N-1$$

Además, se cumple $\sum_{i=1}^{N-1} \Delta \lambda_i = 2$

Una vez determinada los valores de $\Delta \lambda_i$, a partir del sistema anterior, se sustituyen en la expresión de $\bar{k} = \frac{1}{S}$ obteniéndose el valor mínimo de \bar{k} , como función de μ únicamente.

Se puede comprobar, que la condición de \bar{k} mínimo (o S máximo) anterior, equivale a imponer el siguiente con

junto de igualdades

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{N-1}$$

es decir:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{2(1-\mu) + \mu(\Delta\lambda_i + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\lambda_j)} = \text{constante}^{(*)}$$

Este sistema de ecuaciones, puede resolverse, de la siguiente forma:

$$\text{Sea: } \frac{\Delta\lambda_i}{2(1-\mu) + 2\mu \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\lambda_j} = \frac{\rho}{2\mu} \quad \{4.19\}$$

con ρ una constante a determinar.

De un modo recurrente, se puede escribir, llamando

(*) NOTA: Se observa la validez de esta fórmula para el caso $\mu=0$ (sección constante) que implica evidentemente la selección de los puntos de abscisas λ_i en intervalos iguales, es decir:

$$\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_j \quad \text{para todo } i, j$$

$$a = \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\Delta\lambda_i = a^{-1}\rho + \rho \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\lambda_j$$

con lo que resulta

$$\Delta\lambda_1 = a^{-1}\rho$$

$$\Delta\lambda_2 = a^{-1}\rho(1+\rho)$$

$$\Delta\lambda_i = a^{-1}\rho(1+\rho)^{i-1}$$

⋮

$$\Delta\lambda_{N-1} = a^{-1}\rho(1+\rho)^{N-2}$$

La ecuación que permite determinar ρ , se deduce de la condición

$$\sum_{i=1}^{N-1} \Delta\lambda_i = 2 \quad \{4.21\}$$

es decir

$$(1+\rho)^{N-1} = 2a + 1 = \frac{1+\mu}{1-\mu} \quad \{4.21a\}$$

cuya solución es

$$\rho = \left\{ \frac{1+\mu}{1-\mu} \right\}^{\frac{1}{N-1}} - 1$$

Los parámetros del elemento son en este caso:

$$\bar{k} = \frac{1}{S} = \frac{1}{(N-1)a_1} = \frac{\rho+2}{\rho} \frac{\mu}{N-1}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \Delta\lambda_i \left\{ \frac{a}{S} + \frac{2(i-1)a}{S} \right\}$$

es decir

$$\bar{k} = \frac{\frac{1}{\left\{ \frac{1+\mu}{1-\mu} \right\}^{\frac{1}{N-1}}} + 1}{\frac{1}{\left\{ \frac{1+\mu}{1-\mu} \right\}^{\frac{1}{N-1}}} - 1} \frac{\mu}{N-1}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{\mu}{N-1} \frac{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}+1}}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}-1}} \right\}$$

Se observa que cuando $N \rightarrow \infty$ se obtiene en el límite los valores exactos de \bar{k} y \bar{p} , dados por las formulas {3.21}.

Los resultados para $N=3$, han sido obtenidos anteriormente, en el apartado 4.3. Los casos correspondientes a $N=4, 5$ y 6 se muestran en las tablas 4.7, 4.8 y 4.9.

5. ELEMENTOS SIMPLES DE DOS NUDOS CON FUNCIONES DE FORMA NO LINEALES

5.1. Casos patológicos

La introducción de funciones de forma no lineales, debe de realizarse, con ciertas precauciones, ya que pueden producirse elementos en los que los criterios establecidos de convergencia no se cumplen. Ello es debido, a que los po

Tabla 4.7. Elementos con funciones de forma lineales a trozos.

Caso de tres intervalos desiguales.

$$\bar{k} = \frac{\frac{1}{\left\{\frac{1+\mu}{1-\mu}\right\}^{\frac{1}{N-1}} + 1}}{\frac{1}{\left\{\frac{1+\mu}{1-\mu}\right\}^{\frac{1}{N-1}} - 1}} \frac{\mu}{N-1} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{\mu}{N-1} \frac{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \right\} \quad (N = 4)$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.988	0.973	0.950	0.920	0.881	0.829	0.760	0.660	0.466
\bar{p}	0.500	0.515	0.530	0.546	0.562	0.580	0.599	0.622	0.650	0.689	0.769
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.001	0.004	0.006	0.010	0.015	0.022	0.032	0.049	0.092
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.002	-0.004	-0.005	-0.008	-0.010	-0.013	-0.016	-0.020	-0.027	-0.047

Tabla 4.8. Elemento en funciones de forma lineales a trozos.

Caso de cuatro intervalos desiguales.

$$\bar{k} = \frac{\frac{1}{\left\{\frac{1+\mu}{1-\mu}\right\}^{\frac{1}{N-1}} + 1}}{\frac{1}{\left\{\frac{1+\mu}{1-\mu}\right\}^{\frac{1}{N-1}} - 1}} \frac{\mu}{N-1} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{\mu}{N-1} \frac{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \right\} \quad (N = 5)$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.971	0.948	0.916	0.874	0.820	0.746	0.639	0.427
\bar{p}	0.500	0.516	0.532	0.548	0.565	0.584	0.605	0.629	0.658	0.701	0.789
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.002	0.004	0.006	0.008	0.013	0.018	0.028	0.053
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.001	-0.002	-0.003	-0.005	-0.006	-0.007	-0.009	-0.012	-0.015	-0.027

Tabla 4.9. Elementos con funciones de forma lineales a trozos.

Caso de cinco intervalos desiguales.

$$\bar{k} = \frac{\frac{1}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{N-1}{2}} + 1}}{\frac{1}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{N-1}{2}} - 1}} \frac{\mu}{N-1}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu}{27 - 4\mu^2}$$

(N = 6)

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.970	0.946	0.914	0.871	0.815	0.740	0.629	0.408
\bar{p}	0.500	0.516	0.532	0.549	0.567	0.586	0.607	0.632	0.663	0.706	0.799
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.005	0.008	0.012	0.018	0.034
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.001	-0.002	-0.002	-0.003	-0.004	-0.005	-0.006	-0.007	-0.010	-0.017

linomios que disponen las funciones de forma no son completos.

A continuación a efectos ilustrativos se exponen algunos de estos elementos con problemas de convergencia.

5.1.1. Funciones parabolicas convexas

Constituye la extensión obvia de la interpolación lineal del apartado anterior. La figura 5.1 muestra las funciones de forma de un elemento de este tipo, y cuya expresión es:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{(1+\xi)^2}{4} \\ N_2 &= 1 - \frac{(1-\xi)^2}{4} \end{aligned} \quad \{5.1\}$$

No cumple este elemento, el criterio de deformación nula, es decir el movimiento de sólido rígido produce deformaciones no nulas.

La matriz de rigidez que resulta, es:

$$\underline{k} = \frac{4}{3} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 + \mu/2 & -1 \\ -1 & 1 - \mu/2 \end{bmatrix} \quad \{5.2\}$$

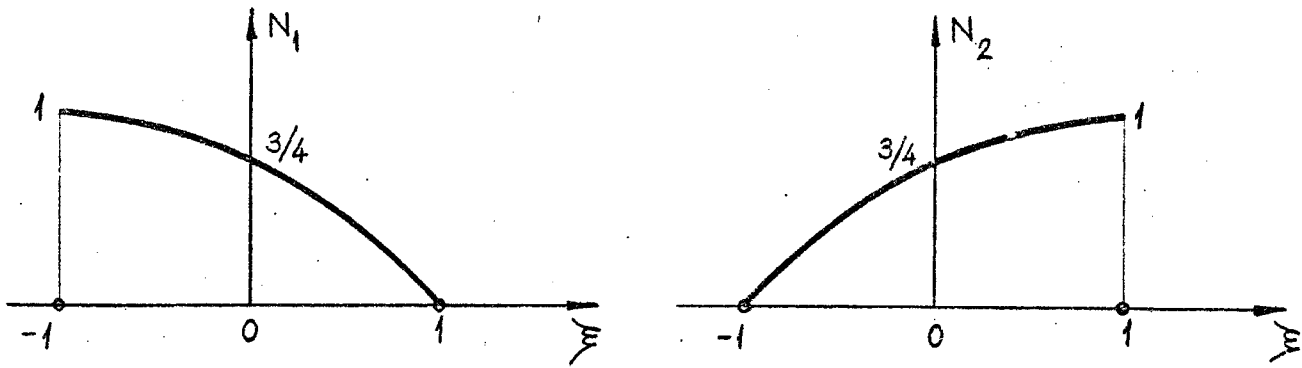


Figura 5.1. Funciones de forma de un elemento parabolico convexo
No convergente.

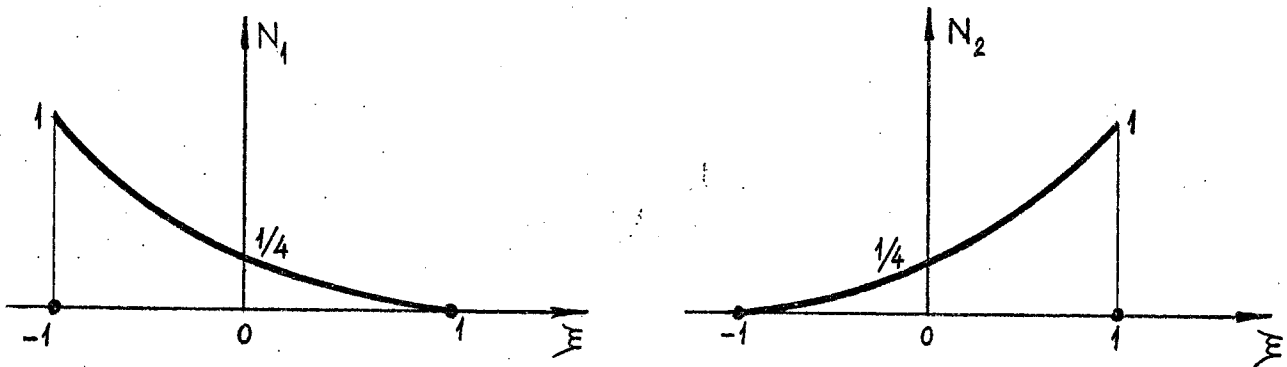


Figura 5.2. Funciones de forma de un elemento parabolico concavo.
No convergente.

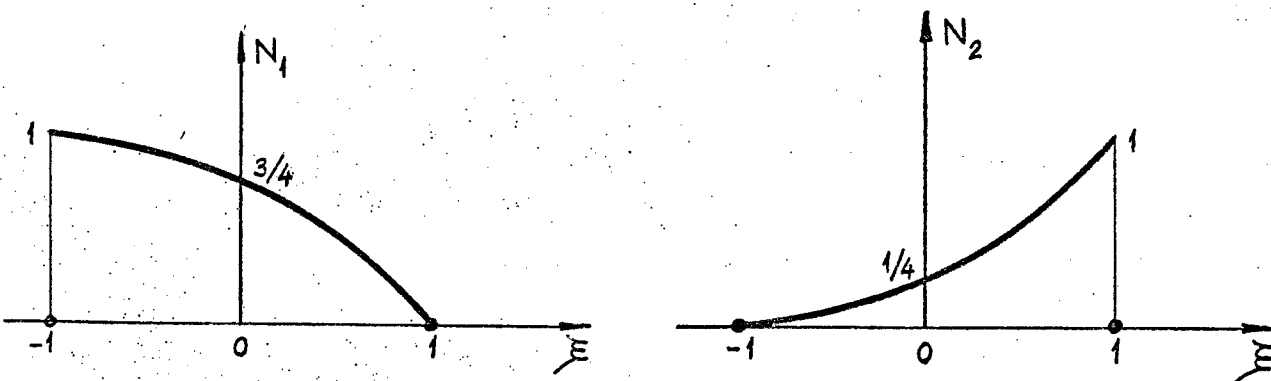


Figura 5.3. Funciones de forma de un elemento parabolico con con
vexidad distinta.

que no es singular, puesto que $|k| = -\frac{EA}{3l} \mu^2$

Las cargas equivalentes a la acción uniforme q son:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \frac{2ql}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{5.3\}$$

que evidentemente, no equilibran a la acción exterior.

$$\text{En efecto } p_1 + p_2 = \frac{4ql}{3} \neq ql$$

La extensión al caso de un polinomio de grado n , es inmediata. Se obtiene:

$$N_1 = 1 - \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^n \quad \{5.4\}$$

$$N_2 = 1 - \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^n$$

que conducen a la matriz de rigidez

$$\underline{k} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{\{n(1+\mu)-\mu\}n}{2n-1} & -\frac{n!}{(2n-1)} \\ -\frac{n!}{(2n-1)} & \frac{\{n(1-\mu)+\mu\}n}{2n-1} \end{bmatrix} \quad \{5.5\}$$

que es no singular $|\underline{k}| \neq 0$

Las cargas equivalentes son:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = q_1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{5.6\}$$

que no satisfacen el equilibrio con la acción q , puesto que

$$p_1 + p_2 = 2q_1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \neq q_1$$

5.1.2. Funciones parabolicas concavas

Corresponden a la figura 5.2, cuyas funciones de forma son:

$$N_1 = \frac{(1-\xi)^2}{4} \quad \{5.7\}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)^2}{4}$$

que evidentemente conducen a los mismos resultados que en el caso de funciones parabolicas convexas, así como la ex tensión al caso de grado n .

5.1.3. Funciones parabolicas con concavidad distinta

Las funciones de forma que se consideran son:

$$N_1 = 1 - \frac{(1+\xi)^2}{4} \quad \{5.8\}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)^2}{4}$$

Este elemento cumple el criterio de deformación nula, el movimiento de un solido rigido no induce deformaciones. La matriz de rigidez sera singular y las cargas -- equivalentes estaran en equilibrio con las acciones exteriores.

No obstante, el criterio de deformación constante, no se satisface, en dimensión finita del elemento.

Los parametros del mismo son:

$$\bar{k} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \quad \{5.9\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{3}$$

Se observa que para $\mu=0$, no coincide con la solución exacta.

La extensión a una parábola de grado n es inmedia
ta.

Las funciones de forma son:

$$N_1 = 1 - \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^n \quad \{5.10\}$$

$$N_2 = \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^n$$

Se satisface el criterio de convergencia de defor
mación nula, pero no el de deformación constante.

Los parametros del elemento son:

$$\bar{k} = \frac{n(1+\mu) - \mu}{2n-1} \quad \{5.11\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{n+1}$$

Si se adoptase funciones de forma con convexidad
opuesta a los anteriores, es decir:

$$N_1 = \frac{(1-\xi)^n}{2} \quad \{5.12\}$$

$$N_2 = 1 - \frac{(1-\xi)^n}{2}$$

se obtienen los siguientes parámetros

$$\bar{k} = \frac{n(1-\mu)+\mu}{2n-1} \quad \{5.13\}$$

$$\bar{p} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si se considera la semisuma de las dos situaciones anteriores de distinta convexidad, es decir, {5.11} y {5.12} se deducen los siguientes resultados:

$$N_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^n \right\} \quad \{5.14\}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^n \right\}$$

Parámetros

$$\bar{k} = \frac{2n}{2n-1} \quad \{5.15\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2}$$

que son independientes de μ y para n muy grande coincide con la solución exacta en el caso $\mu=0$ (sección constante)..

5.1.4. Funciones parabolicas-lineal a trozos

Se supone un caso no convergente, a efectos ilustrativos cuyas funciones de forma, no satisfacen el criterio de deformación nula y que se muestran en la figura 5.4. La expresión de las mismas es:

$$N_1 = \begin{cases} \frac{1}{3}(1-2\xi) & \text{para } \xi \in (-1, 0) \\ \frac{1}{3}(1-\xi)^2 & \text{para } \xi \in (0, 1) \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} \frac{1}{3}(1+\xi)^2 & \text{para } \xi \in (-1, 0) \\ \frac{1}{3}(1+2\xi) & \text{para } \xi \in (0, 1) \end{cases} \quad \{5.16\}$$

La matriz de rigidez es:

$$\underline{k} = \frac{EA}{I} \begin{bmatrix} \frac{32}{27} - \frac{10}{27} \mu & -\frac{24}{27} \\ -\frac{24}{27} & \frac{32}{27} + \frac{10}{27} \mu \end{bmatrix} \quad \{5.17\}$$

que no es singular $|\underline{k}| = \{0,615 - 0,137\mu^2\} \frac{EA}{I} \neq 0$

Las cargas equivalentes son:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \frac{13}{36} q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{5.18\}$$

cuya suma no coincide con la carga total q_1 .

Sin embargo el elemento compuesto por una de las funciones de forma anteriores y su diferencia respecto a la unidad, satisface el criterio de deformación nula, pero todavía no él de deformación constante. Así, se puede escribir para el elemento de la figura 5.4 cuyas funciones de forma son:

$$N_1 = \begin{cases} \frac{1}{3}(1-2\xi) & \text{para } \xi \in (-1, 0) \\ \frac{1}{3}(1-\xi)^2 & \text{para } \xi \in (0, 1) \end{cases} \quad \{5.19\}$$

$$N_2 = 1 - N_1$$

resultan los siguientes parámetros:

$$\bar{k} = \frac{32}{27} - \frac{20}{54} \mu$$

{5.20}

$$\bar{p} = \frac{23}{35}$$

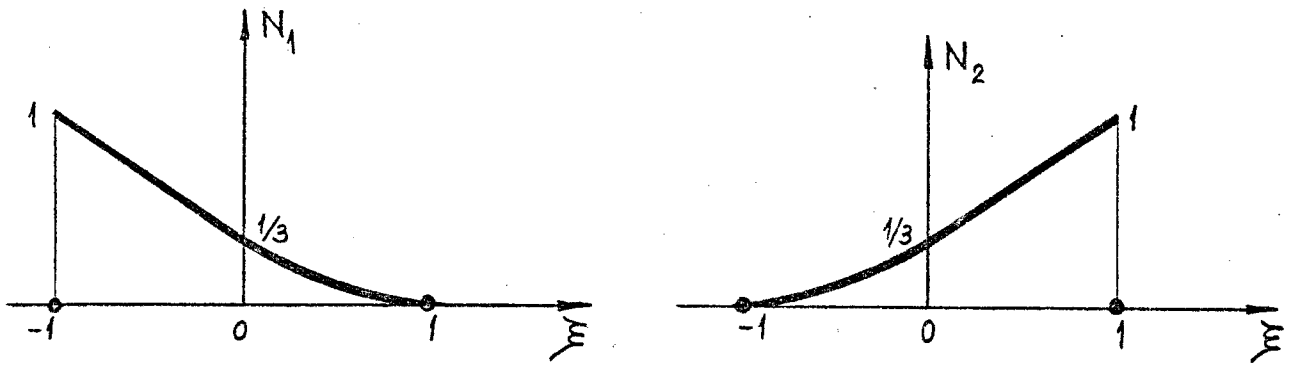


Figura 5.4. Funciones de forma de un elemento parabolico-lineal.
No convergente

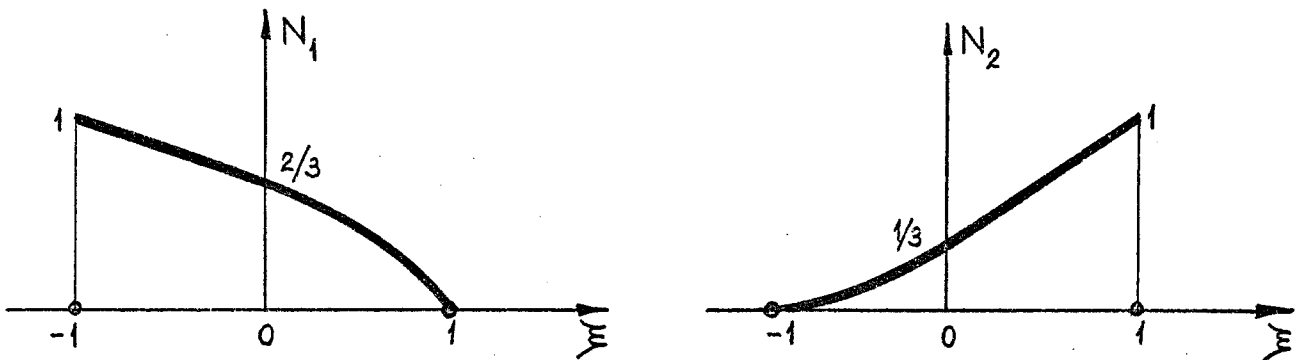


Figura 5.5. Funciones de forma de un elemento parabolico lineal.

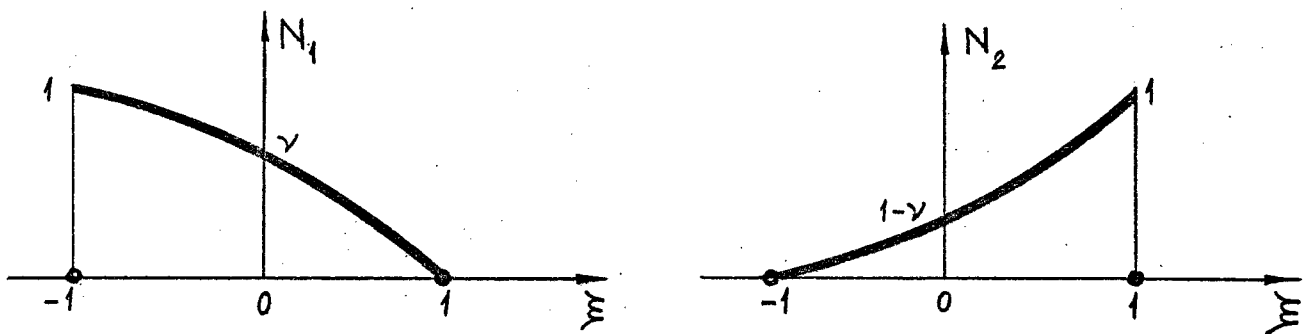


Figura 5.6. Función parabólica. Un tramo único.

que implican un error con respecto a la solución exacta en el caso de sección constante ($\mu=0$) del orden del 19% en \bar{k} y 28% en \bar{p} .

El caso simétrico del anterior conduce a resultados semejantes. En efecto de las funciones de forma (figura 5.5):

$$N_1 = 1 - N_2$$

$$N_2 = \begin{cases} \frac{1}{3}(1+\xi)^2 & \text{para } \xi \in (-1, 0) \\ \frac{1}{3}(1+2\xi)^2 & \text{para } \xi \in (0, 1) \end{cases} \quad \{5.21\}$$

se deducen los parámetros

$$\bar{k} = \frac{32}{27} + \frac{20}{54} \mu \quad \{5.22\}$$

$$\bar{p} = \frac{13}{36}$$

De la semisuma de ambos resultados, resultan los valores independientes de μ .

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{32}{27} \\ \bar{p} &= 0.5 \end{aligned} \quad \{5.23\}$$

Tabla 5.1. Valores de los parámetros del elemento.

Elemento simple con funciones de forma parabolica. Tramo unico.

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{3} \mu^2 \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.970	0.947	0.917	0.880	0.837	0.787	0.730	0.673
\bar{p}	0.500	0.517	0.533	0.550	0.567	0.583	0.600	0.617	0.633	0.650	0.665
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.007	0.014	0.030	0.059	0.119	0.299
$\Delta\bar{p}$	0.000	0.000	-0.001	-0.001	-0.003	-0.007	-0.012	-0.021	-0.037	-0.066	-0.151

5.2. Funciones parabolicas

Se ha comprobado en el apartado 5.1, la necesidad de usar polinomios completos, si se desean obtener resultados convergentes o con error acotado. Por ello, es posible extender, la tecnica desarrollada en 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 de considerar variables adicionales (ordenadas v_i y abscisas λ_i intermedios de las funciones de forma) y minimizar el parametro resultante de la rigidez \bar{k} , con respecto a dichas variables.

Primeramente se supone una abscisa especificada $\lambda=0$ y variable la ordenada v correspondiente. Figura 5.6, - cuyas funciones de forma son:

$$N_1 = \frac{(\xi-1)}{2} - v(\xi^2-1) \quad \{5.24\}$$

$$N_2 = \frac{(\xi+1)\xi}{2} - (1-v)(\xi^2-1)$$

que conducen a los siguientes valores de los parámetros:

$$\bar{k} = \frac{4}{3}(1-2v)(1-2v-\mu) + \frac{1}{2} \quad \{5.25\}$$
$$\bar{p} = \frac{(5-4v)}{3}$$

Si se elige v de modo que haga \bar{k} mínimo, es decir, con la condición

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial v} = 0$$

se obtiene $v = \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu}{2})$

con lo que las formulas {5.25} se convierten en los siguientes

$$\begin{aligned} \bar{k} &= 1 - \frac{1}{3} \mu^2 \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{6} \end{aligned} \quad \{5.26\}$$

Los valores de estos parámetros, se representan en la tabla 5.1.

En el caso de que la abscisa sea distinta del punto central $\lambda=0$, las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(\xi-1)(\xi-\lambda)}{2(1+\lambda)} + \frac{\xi^2-1}{\lambda^2-1} \\ N_2 &= \frac{(\xi+1)(\xi-\lambda)}{2(1-\lambda)} + (1-v) \frac{\xi^2-1}{\lambda^2-1} \end{aligned} \quad \{5.27\}$$

Los parámetros en este caso, tiene la expresión:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{4}{3} \frac{\lambda-1 + 2v}{\lambda^2-1} \left(\frac{\lambda-1 + 2v}{\lambda^2-1} - \mu \right) + \frac{1}{2} \\ \bar{p} &= \frac{3\lambda^2 + 2\lambda - 5 + 4v}{3(\lambda^2-1)}\end{aligned}\quad \{5.28\}$$

Se elige v de modo que \bar{k} sea mínimo, con lo que resulta:

$$v = \frac{1}{4} \{ \mu \lambda^2 - 2\lambda + 2 - \mu \}$$

y los parametros son

$$\begin{aligned}\bar{k} &= 1 - \frac{1}{3} \mu^2 \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{6}\end{aligned}\quad \{5.29\}$$

que coincide con los obtenidos en el caso de $\lambda=0$.

La anterior técnica se podría extender introduciendo $N-2$ puntos intermedios $(\lambda_i, v_i, i=2,3,\dots,N-2)$, que con los dos extremos $\lambda_1 = -1, v_1 = 1$ y $\lambda_N = 1, v_N = 0$ para la función de forma N_1 , permitiría mediante la fórmula de interpolación de Lagrange obtener un polinomio de grado $N-1$, y de ahí los parametros del elementos.

La posición de estos puntos intermedios se determina por medio de la condición de mínimo k. Se comprende - que existen dos posibilidades: una, de puntos equidistantes y otra con puntos con abscisas λ_i no conocidos de antemano.

Una posibilidad de familias de elementos, relacionada con la anterior, corresponde a considerar parabolas de grado K , que pasen por $K+1$ puntos interiores, de modo que - la función de forma sea continúa, pero con derivada discontinua. De este modo, se obtendría elementos parabólicos en varios tramos, análogamente a como se comentó en el apartado 4. anterior .

6. ELEMENTOS CON TRES GRADOS DE LIBERTAD

6.1. Obtención de elementos simples de dos nudos. Condensación estática.

Se impone que en la deducción de la matriz de rigidez \underline{k}^* y las cargas equivalentes \underline{p}^* , los grados de libertad en movimientos han sido ordenados en la forma:

$\underline{d}^* = \{u_1, u_2, u_a\}^T$, en donde u_a representa el - grado de libertad adicional distintos de los movimientos u_1

y u_2 en los nudos extremos. La matriz del elemento simple - de dos nudos \underline{k} y \underline{p} se deducen mediante el conocido proceso de condensación estática como sigue:

La ecuación

$$\underline{p}^* = \underline{k}^* \underline{d}^*$$

puede escribirse particionada como sigue:

$$\begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{oo} & \underline{k}_{oa} \\ \underline{k}_{ao} & \underline{k}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d} \\ \underline{u}_a \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se deduce

$$\underline{p} = \underline{k} \underline{d}$$

$$\text{con } \underline{k} = \underline{k}_{oo} - \underline{k}_{oa} \underline{k}_{aa}^{-1} \underline{k}_{ao} \quad \{6.1\}$$

Analogamente las cargas equivalente son:

$$\text{Si } \underline{p}^* = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_o \\ p_a \end{bmatrix} \quad \{6.2\}$$

son las cargas equivalentes en el elemento original, las -
cargas equivalentes en el elemento simple de dos nudos adop-
tan la forma

$$\underline{p} = \underline{p}_o - \underline{k}_{oa} k_{aa}^{-1} p_a \quad \{6.2\}$$

6.2. Elemento con dos nudos. Hiperelemento

Se estudio el elemento con los siguientes grados
de libertad $d^T = (u_1, u_2, u_2', x)$. La variable adicional in-
troduciendo en el nudo 2, es el grado de libertad no bási-
co, correspondiente a la derivada del movimiento u_2 respecto
to a la abscisa x .

Las funciones de forma se muestran en la figura
6.1. y son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2 \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\xi) \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1-\xi^2) \end{aligned} \quad \{6.3\}$$

La matriz de rigidez del elemento es:

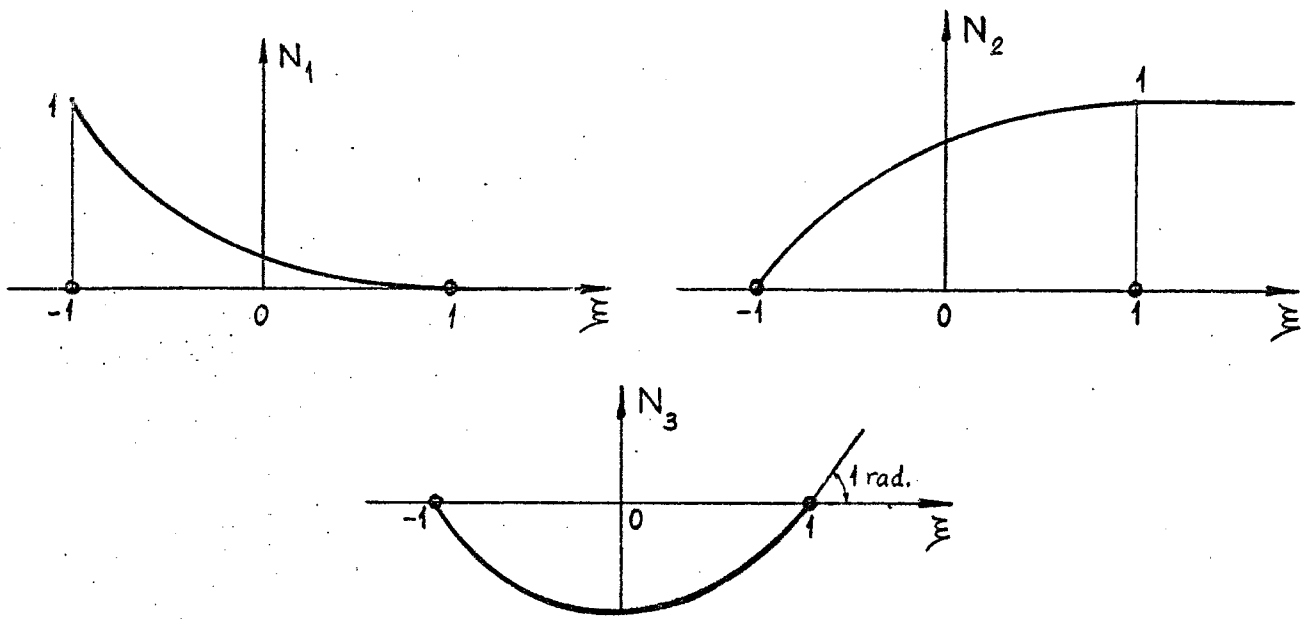


Figura 6.1. Funciones de forma del elemento con grados de movimiento ($u_1, u_2, u_{2,x}$). Hiperelemento.

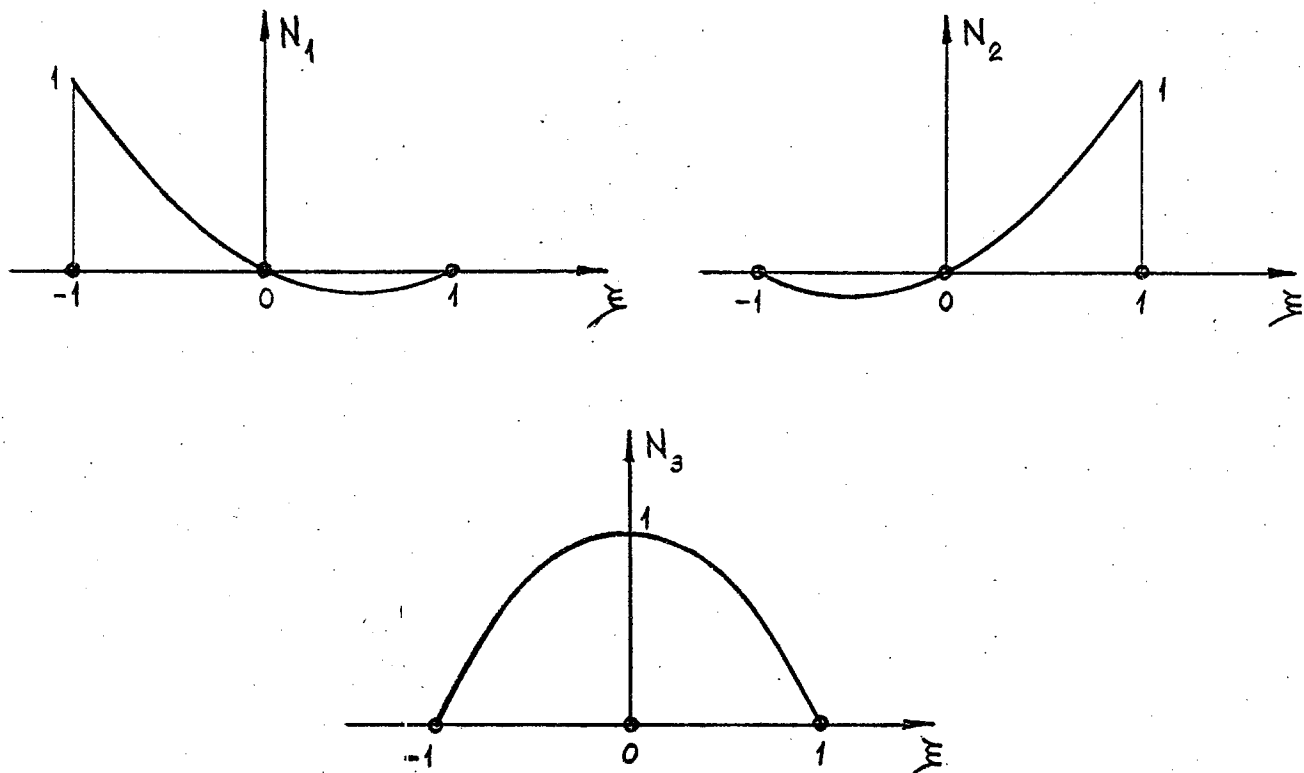


Figura 6.2. Funciones de forma del elemento con tres nudos.

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \mu & -(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \mu) & \frac{1}{3}(1-\mu) \\ & \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \mu & -\frac{1}{3}(1-\mu) \\ \text{simétrica} & & \frac{1^2}{3} \end{bmatrix} \frac{EA}{I} \quad \{6.4\}$$

y las cargas equivalentes son

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} q_1$$

Por condensación se deducen los parametros del elemento simple de dos nudos:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= 1 - \frac{1}{3} \mu^2 \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6} \end{aligned} \quad \{6.5\}$$

Estos resultados han sido obtenidos por otro procedimiento y se encuentran en la tabla 5.1.

6.3. Elementos con tres nudos

6.3.1. Grado de libertad intermedio esencial. Nudo central

Las funciones de forma para el elemento con un nudo central, son:

$$N_1 = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \xi(\xi+1) \quad \{6.6\}$$

$$N_3 = 1-\xi^2$$

Se representan en la figura 6.2.

La matriz de rigidez y cargas equivalentes son:

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \mu & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \mu \\ & \frac{7}{3} + \frac{4}{3} \mu & -\frac{8}{3} - \frac{4}{3} \mu \\ \text{simétrica} & & \frac{16}{3} \end{bmatrix} \frac{EA}{l}$$

$$p^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} q_l \quad \{6.7\}$$

Condensando el grado de libertad intermedio, resultan los parametros del elemento simple de dos nudos:

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{3} \mu^2$$

{6.8}

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}$$

6.3.2. Grado de libertad intermedio esencial. Nudo arbitrario

Las funciones de forma son, en este caso:

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(\lambda-\xi)}{2(1+\lambda)}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(\lambda-\xi)}{2(\lambda-1)}$$

{6.9}

$$N_3 = \frac{1-\xi^2}{1-\lambda^2}$$

La matriz de rigidez y cargas equivalentes de este elemento son:

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{2(\lambda+1)^2} - \frac{4\mu}{3(\lambda+1)} & -1 - \frac{4}{3(\lambda^2-1)} + \frac{4\mu}{3(\lambda^2-1)} & \frac{4}{3(1-\lambda^2)} \left(-\frac{2}{\lambda+1} + \mu \right) \\ & 1 + \frac{4}{3(\lambda-1)^2} - \frac{4\mu}{3(\lambda-1)} & \frac{4}{3(1-\lambda^2)} \left(\frac{2}{\lambda-1} - \mu \right) \\ & & \frac{16}{3(1-\lambda^2)^2} \end{bmatrix} \frac{EA}{l}$$

simétrica

$$p^* = \begin{bmatrix} \frac{3\lambda+1}{6(\lambda+1)} \\ \frac{3\lambda-1}{6(\lambda-1)} \\ \frac{2}{3(1-\lambda)^2} \end{bmatrix} q_1 \quad \{6.10\}$$

y la condensación de ambas matrices conduce a los valores siguientes de los parametros

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{3} \mu^2$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6} \quad \{6.11\}$$

que son independientes de la posición λ del nudo intermedio

6.3.3. Grado de libertad intermedio no esencial

Se estudia este caso suponiendo que el grado de libertad se encuentra situado en un nudo intermedio arbitrario.

En primer lugar se supone que es la derivada del movimiento, el grado de libertad no esencial. Las funciones de forma son (figura 6.3) :

$$N_1 = \frac{1}{4\lambda}(1-\xi)(2\lambda-1-\xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{4\lambda}(1+\xi)(2\lambda+1-\xi) \quad \{6.12\}$$

$$N_3 = -\frac{1}{4\lambda}(1-\xi^2) \quad (\lambda=0)$$

Los casos particulares limites de $\lambda=\pm 1$ corresponden al hiperelemento tratado en 6.2.

Las matrices de rigidez y de cargas equivalentes son:

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\lambda^2} + 1 - \frac{2\mu}{3\lambda} & -(\frac{1}{3\lambda^2} + 1 - \frac{2\mu}{3\lambda}) & \frac{1}{3\lambda^2}(1-\lambda\mu) \\ & (\frac{1}{3\lambda^2} + 1 - \frac{2\mu}{3\lambda}) & -\frac{1}{3\lambda^2}(1-\lambda\mu) \\ & & \frac{1^2}{3\lambda^2} \end{bmatrix} \frac{EA}{l}$$

simétrica

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{6\lambda} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6\lambda} \\ -\frac{1}{6\lambda} \end{bmatrix} q_1$$

Eliminando por condensación el grado de libertad del nudo intermedio, resultan los siguientes parametros, -

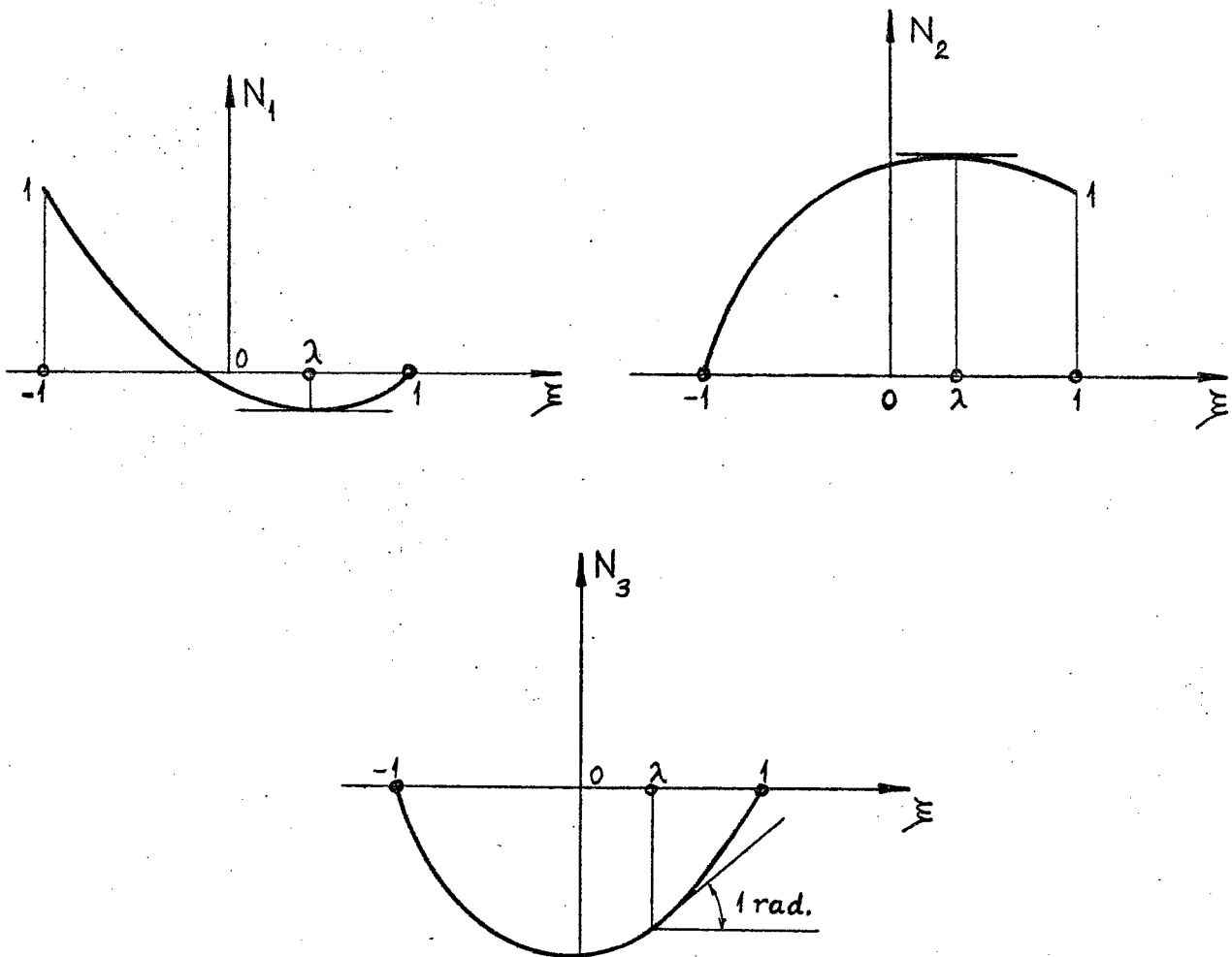


Figura 6.3. Funciones de forma del elemento con dos nudos y 1 gdl interior no esencial.

independientes de la posición de este nudo.

$$\begin{aligned}\underline{k} &= 1 - \frac{1}{3} \mu^2 \\ \underline{p} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \mu\end{aligned}\tag{6.14}$$

Si el grado de libertad corresponde a la curvatura, se deducen las funciones de forma que siguen:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_3 &= -\frac{1}{8}(1-\xi^2)\end{aligned}\tag{6.15}$$

Conviene observar que la función de forma N_3 es independiente de λ , como cabía esperar en parábolas de segundo orden (curvatura constante). Se comprueba que las funciones de forma N_1 y N_2 , corresponden al caso lineal simple (apartado 4.1) y N_3 a una variable sin nudo o modo no conforme en la terminología de los elementos 2-D y 3-D con continuidad C^0 . A este respecto ver la publicación (12). En esta publicación aparece de un modo natural como extensión del caso anterior correspondientes a un grado de libertad intermedio.

Las matrices de este elemento son

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1^2}{6} \mu \\ -1 & 1 & \frac{1^2}{6} \mu \\ -\frac{1^2}{6} & \frac{1^2}{6} & \frac{1^4}{12} \mu \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \quad \{6.16\}$$

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1^2}{12} \end{bmatrix} q_1$$

y por eliminación del grado de libertad intermedio se obtiene el resultado:

$$\underline{k} = 1 - \frac{\mu^2}{3} \quad \{6.17\}$$

$$\underline{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}$$

que coincide con los anteriores.

7. ELEMENTOS CON N GRADOS DE LIBERTAD

Como en el caso anterior, si se ordenan los n - grados de libertad en movimientos como sigue:

$$\underline{d}^T = (u_1, u_2, N-2 \text{ restantes grados}) = (\underline{d}_0, \underline{d}_a)$$

con

$$\underline{d}^T = (u_1, u_2)$$

la matriz de rigidez k^* y vector de cargas equivalentes p^* se pueden escribir:

$$\begin{bmatrix} p_o \\ p_a \end{bmatrix} = k^* \begin{bmatrix} \underline{d}_0 \\ \underline{d}_a \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} p_o \\ p_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{oo} & k_{oa} \\ k_{oa} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_0 \\ \underline{d}_a \end{bmatrix}$$

y las matrices condensadas del elemento simple son:

$$\underline{k} = k_{oo} - k_{oa} k_{aa}^{-1} k_{ao}$$

$$\underline{p} = p_o - k_{oa} k_{aa}^{-1} p_a$$

analogas a los lados en el apartado 6.1, pero ahora k_{aa} es

una matriz cuadrada de dimensión $N-2$.

7.1. Elementos en dos nudos (Hiperelementos).

Para obtener las funciones de forma, es necesario recurrir a una generalización de las fórmulas de interpolación de Lagrange.

Se denomina $P_{ij}(x)$ a un polinomio de grado N

$$(N = \sum_{k=1}^K n_k)$$

que pasa por K puntos tales que en el k -simo, de abscisa x_k se anulan los n_k primeras derivadas ($k=1,2,\dots,K, k \neq i$) y en el punto i , de abscisa x_i la derivada j es igual a la unidad y las restantes derivadas se anulan asimismo en x_i .

Matemáticamente, la función $P_{ij}(x)$ se define como sigue:

$$\left. \frac{d^l P_{ij}}{dx^l} \right|_{x=x_k} = 0 \quad k \neq i, \quad l=0,1,2,\dots,n_k, \quad k=1,2,3,\dots,K.$$

$$\left. \frac{d^l P_{ij}}{dx^l} \right|_{x=x_i} = 0 \quad l \neq j, \quad l=0,1,2,3,\dots,n_i$$

$$\left. \frac{d^j P_{ij}}{dx^j} \right|_{x=x_i} = 1$$

Para obtener $P_{ij}(x)$ se define el polinomio

$$P_i(x) = \frac{(x-x_1)^{n_1} (x-x_2)^{n_2} \dots (x-x_K)^{n_K}}{(x-x_i)^{n_i}}$$

que adopta los valores numericos π_{il} siguientes:

$$\left. \frac{d^l P_i(x)}{dx^l} \right|_{x=x_i} = \pi_{il} \quad (l=0,1,2,\dots,n_i)$$

Entonces, se tiene:

$$P_{ij}(x) = P_i(x) \{g_0 + \frac{g_1}{1!}(x-x_i) + \frac{g_2}{2!}(x-x_i)^2 + \dots + \frac{g_n}{n!}(x-x_i)^{n_i}\} \quad \{7.1\}$$

siendo

$$g_l = 0 \quad \text{para} \quad l=0,1,2,\dots,j-1$$

$$g_j = \pi_{io}^{-1}$$

y los restantes valores de g_l se pueden obtener de la siguiente formula recursiva:

$$g_l = -\pi_{io}^{-1} \sum_{\lambda=1}^{l-j} \binom{l}{\lambda} \pi_{i\lambda} g_{l-\lambda} \quad \{7.2\}$$

con $l = j + 1, j + 2, \dots, n_i$

Como aplicación de la fórmula anterior se indican algunos hiperlementos de dos nudos. Para ello, se comprende que las funciones de forma relacionadas con el nudo $i (i=1,2)$ y correspondientes a la derivada $j (j=0,1,2,\dots, N1)$ y que se designan por $N_{ij}(x)$ es idéntica a la función $P_{ij}(x)$ (*)

a) Elemento simple de dos nudos (C^0). Movimientos (u_1, u_2)

$$N_1 = N_{10} = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

{7.3}

$$N_2 = N_{20} = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

b) Hiper elemento de dos nudos (C^1). Movimientos

(u_1, u_{1x}, u_2, u_{2x})

$$N_1 = N_{10} = \frac{1}{4}(\xi-1)^2(2+\xi)$$

$$N_3 = N_{20} = \frac{1}{4}(\xi+1)^2(2-\xi)$$

{7.4}

$$N_2 = N_{11} = \frac{1}{4}(\xi-1)^2(\xi+1)$$

$$N_4 = N_{21} = -\frac{1}{4}(\xi+1)^2(1-\xi)$$

(*)NOTA: En realidad las funciones de forma N_{ij} en este capítulo deben de ser multiplicadas por $(1/2)^j$ con objeto de tener en cuenta la transformación de coordenadas x a las adimensionales ξ , pero ello no altera los resultados obtenidos salvo en dicho factor.

c) Hiper elemento de dos nudos (C^2). Movimientos

($u_1, u_{1x}, u_{2x}, u_2, u_{2x}, u_{2xx}$)

$$N_{10} = \frac{1}{16}(1-\xi)^3(3\xi^2+9\xi+8)$$

$$N_{20} = \frac{1}{16}(1+\xi)^3(3\xi^2-9\xi+8)$$

$$N_{11} = \frac{1}{16}(1-\xi)^3(\xi+1)(3\xi+5) \quad \{7.5\}$$

$$N_{21} = \frac{1}{16}(\xi+1)^3(\xi-1)(3\xi-5)$$

$$N_{12} = \frac{1}{16}(1-\xi)^3(\xi+1)^2$$

$$N_{22} = \frac{1}{16}(\xi+1)^3(1-\xi)^2$$

d) Hiper elemento de dos nudos (C^{m-1}). Movimientos

($u_1, u_{1x}, u_{1xx}, \dots, u_{1, \underbrace{xx \dots x}_{m-1}}, u_2, u_{2xx}, \dots, u_{2, \underbrace{xxx \dots x}_{m-1}}$)

$$N_{10} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^k$$

$$N_{11} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^m \sum_{k=1}^{m-1} (-)^k \binom{m+k-2}{k-1} \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^k \quad \{7.6\}$$

$$N_{12} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^m \sum_{k=2}^{m-1} \binom{m+k-3}{k-2} \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^k$$

$$N_{1k} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^m 2^k \frac{n-1}{h-k} (-)^h \binom{m+k-h-1}{k-1} \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^h$$

$$N_{1,m-1} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^m 2^{m-1} \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{m-1} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^m (\xi+1)^{m-1}$$

.. Las expresiones de N_{2k} se deducen de los N_{1k} cambiando ξ en $-\xi$.

e) Hiper elemento de dos nudos C^{m_1-1} en el nudo 1 y C^{m_2-1} en el nudo 2).

$$N_{1j} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{m_1} (-)^j \frac{(1+x)^j}{j!} \sum_{l=0}^{m_2-1-j} \binom{m_1+l-1}{l} \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^l \quad j=1,2,\dots,m_1-1$$

$$N_{2j} = \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{m_2} (-)^j \frac{(1-x)^j}{j!} \sum_{l=0}^{m_1-1-j} \binom{m_2+l-1}{l} \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^l \quad j=1,2,\dots,m_2-1$$

{7.7}

Una vez obtenidas las expresiones de las funciones de forma es posible deducir la expresión final de la matriz de rigidez. A efectos ilustrativos, se estudia aquí, el caso C^1 , cuyas funciones de forma se muestran en {7.4} y figura 7.1.

La matriz de rigidez y cargas equivalentes son:

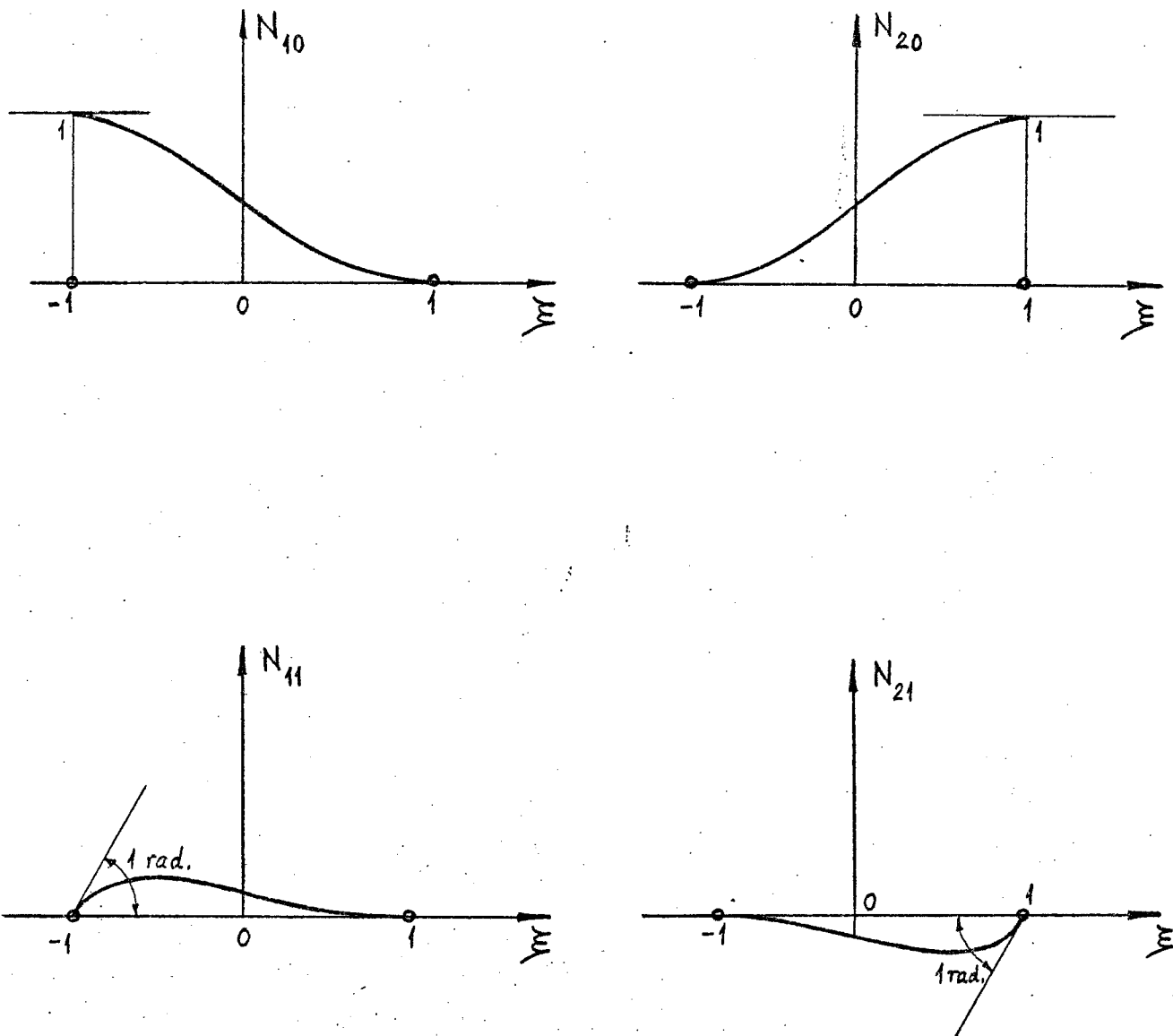


Figura 7.1. Hiperelemento de dos nudos (C^1).

$$\underline{k}^* = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10}(1+\mu) & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}(1+\mu) \\ & \frac{1^2}{15}(2-\mu) & -\frac{1}{10}(1+\mu) & -\frac{1^2}{30} \\ \text{simétrica} & & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}(2+\mu) \end{bmatrix} \quad \{7.8\}$$

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} q_1 \quad \{7.9\}$$

y las matrices condensadas del elemento simple estan definidas por los parámetros:

$$\bar{k} = 1 - \frac{5\mu^2}{15-4\mu^2} \quad \{7.10\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15-4\mu^2)}$$

Los valores de \underline{k} y \underline{p} se resumen en la tabla 7.1.

7.2. Elementos con K(2<k<N) nudos. Hiperelementos

Tabla 7.1. Valores de los parámetros del elemento.

Elemento simple obtenido por condensación del hiperelemento C^1 .

$$\bar{k} = 1 - \frac{5\mu^2}{15 - 4\mu^2} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15 - 4\mu^2)}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.969	0.944	0.911	0.867	0.812	0.743	0.656	0.558
\bar{p}	0.500	0.517	0.534	0.551	0.570	0.589	0.611	0.634	0.661	0.691	0.723
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.005	0.015	0.045	0.184
$\Delta\bar{p}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.001	-0.004	-0.009	-0.025	-0.093

Las fórmulas {7.1} y {7.2} permiten determinar directamente las funciones de forma en el caso general de $k-2$ nudos intermedios, separados a intervalos iguales o desiguales. Con propósito ilustrativo, se muestran aquí, el caso de tres nudos, con el intermedio central designado por el número 3. Se suponen que en estos dos nudos se especifican hasta la derivada m , por lo que el número de grados de libertad del elemento es $3(m+1)$.

Utilizando la notación del apartado 7.1 se escribe:

$$p_2(\xi) = \frac{(\xi-1)^m \xi^m (\xi+1)}{(\xi-1)^m} = \xi^m - (\xi+1)^m$$

con lo que

$$\pi_{2k} = k \int_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{m}{k-i} 2^{m-i} = \frac{1}{2} k! \int_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{m}{k-i} (2^{m-i} + 2^{m-k+i})$$

Denominando $\bar{g}_1 = \frac{g_1}{1!}$ se tiene la fórmula de recurrencia

$$\bar{g}_1 = \bar{g}_2 = \dots \bar{g}_{j-1} = 0$$

$$\bar{g}_j = \frac{2^{-m}}{j!}$$

$$\bar{g}_1 = - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2^{-\frac{k}{2}} \bar{g}_{1-k} \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{m}{k-i} \operatorname{Ch}\left\{\left(\frac{k}{2}-i\right) \ln^2\right\}$$

$$l = j + 1, j + 2, \dots$$

con lo que resulta

$$N_{2j} = (\xi-1)^j \xi^m (\xi+1)^m \sum_{\lambda=0}^{m-j-1} \bar{g}_{j+\lambda} (\xi-1)^\lambda \quad \{7.11\}$$

Analogamente para el nudo central

$$p_3(x) = (\xi^2-1)^m$$

$$\pi_{3k} = k (-)^k \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{m}{k-i}$$

$$\bar{g}_1 = (-)^{m+1} \sum_{k=1}^j (-)^k \left\{ \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{m}{k-i} \right\} \bar{g}_{1-k}$$

$$\text{con } \bar{g}_j = \frac{(-)^m}{j} \quad \bar{g}_1 = 0 \quad \text{para } l=0,1,2,\dots,j-1$$

con lo que se obtiene la función de forma siguiente

$$N_{3j} = \xi^j (\xi^2-1)^m \sum_{\lambda=0}^{m-j-1} \bar{g}_{j+\lambda} \xi^\lambda \quad \{7.12\}$$

La función de forma N_{1j} se deduce de la N_{2j} cambiando ξ en $-\xi$.

En el caso particular del hiperelemento con los siguientes grados de libertad en movimientos: u_1, u_2, u_3, u_{3x} las funciones de forma son:

$$N_1 = N_{10} = \frac{1}{2} \xi^2 (1-\xi) \quad \{7.13\}$$

$$N_2 = N_{20} = \frac{1}{2} \xi^2 (1+\xi)$$

$$N_3 = N_{30} = 1-\xi^2$$

$$N_4 = N_{31} = \frac{1}{2} \xi (1-\xi^2)$$

Estas funciones se representan en la figura 7.2.

La matriz de rigidez es:

$$k^* = \frac{4EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{47}{60} - \frac{3}{5} \mu & -\frac{7}{60} & -\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \mu & (\frac{1}{5} - \frac{2}{15} \mu) l \\ & \frac{47}{60} + \frac{3}{5} \mu & -\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \mu & (\frac{1}{5} + \frac{2}{15} \mu) l \\ & & \frac{4}{3} & \frac{4}{15} \mu l \\ & & & \frac{1}{5} l^2 \end{bmatrix}$$

simétrica

{7.14}

$$p^* = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 0 \right\}^T q_1$$

La condensación estática de los grados de libertad 3 y 4 conducen a los valores siguientes de los parametros:

$$\bar{k} = 1 - \frac{5\mu^2}{15 - 4\mu^2}$$

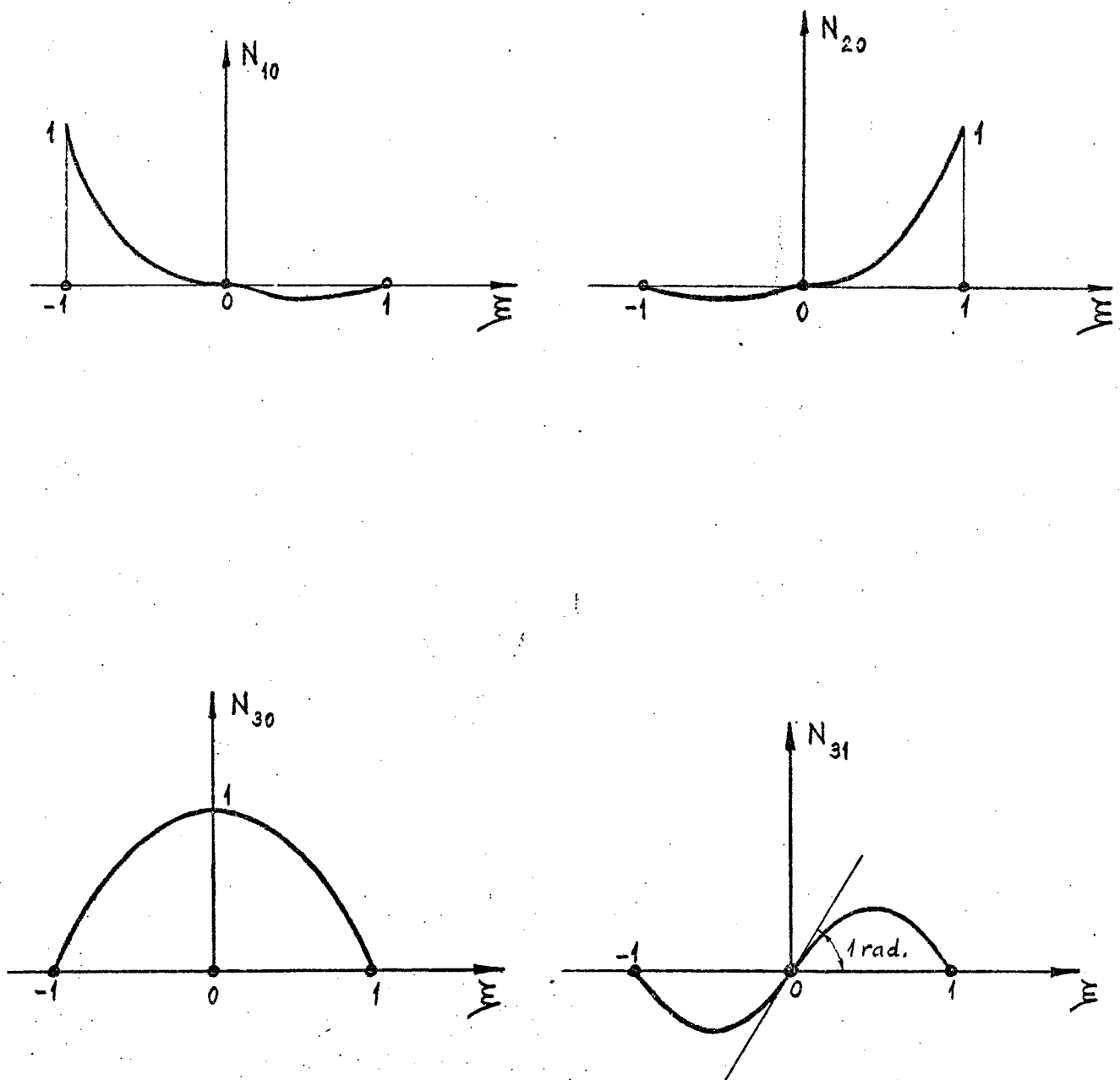


Figura 7.2. Hiperelemento con tres nudos.

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15 - 4\mu^2)}$$

que coinciden con los obtenidos en el apartado anterior. Tabla 7.1 .

7.3. Elementos con N nudos

En esta situación, se calculan los típicos elementos Lagrangianos cuyas funciones de forma son directamente

$$N_i = N_{i0} = \frac{p_i(\xi)}{p_i(\lambda_i)}$$

$$\text{en donde } p_i(\xi) = \frac{(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2) \dots (\xi - \lambda_N)}{(\xi - \lambda_i)}$$

λ_i la ordenada del i-simo nudo ($\lambda_1 = -1$ y $\lambda_N = 1$)

Es posible obtener formulas generales de las matrices de rigidez en este caso general, sin embargo, con propósito ilustrativo, solo se presenta la situación de cuatro nudos equidistantes.

Las funciones de forma son (figura 7.3).

$$N_1 = N_{10} = -\frac{9}{16}(\xi^2 - \frac{1}{9})(\xi - 1)$$

$$N_2 = N_{20} = \frac{27}{16}(\xi - \frac{1}{3})(\xi^2 - 1) \quad \{7.15\}$$

$$N_3 = N_{30} = \frac{27}{16}(\xi + \frac{1}{3})(1 - \xi^2)$$

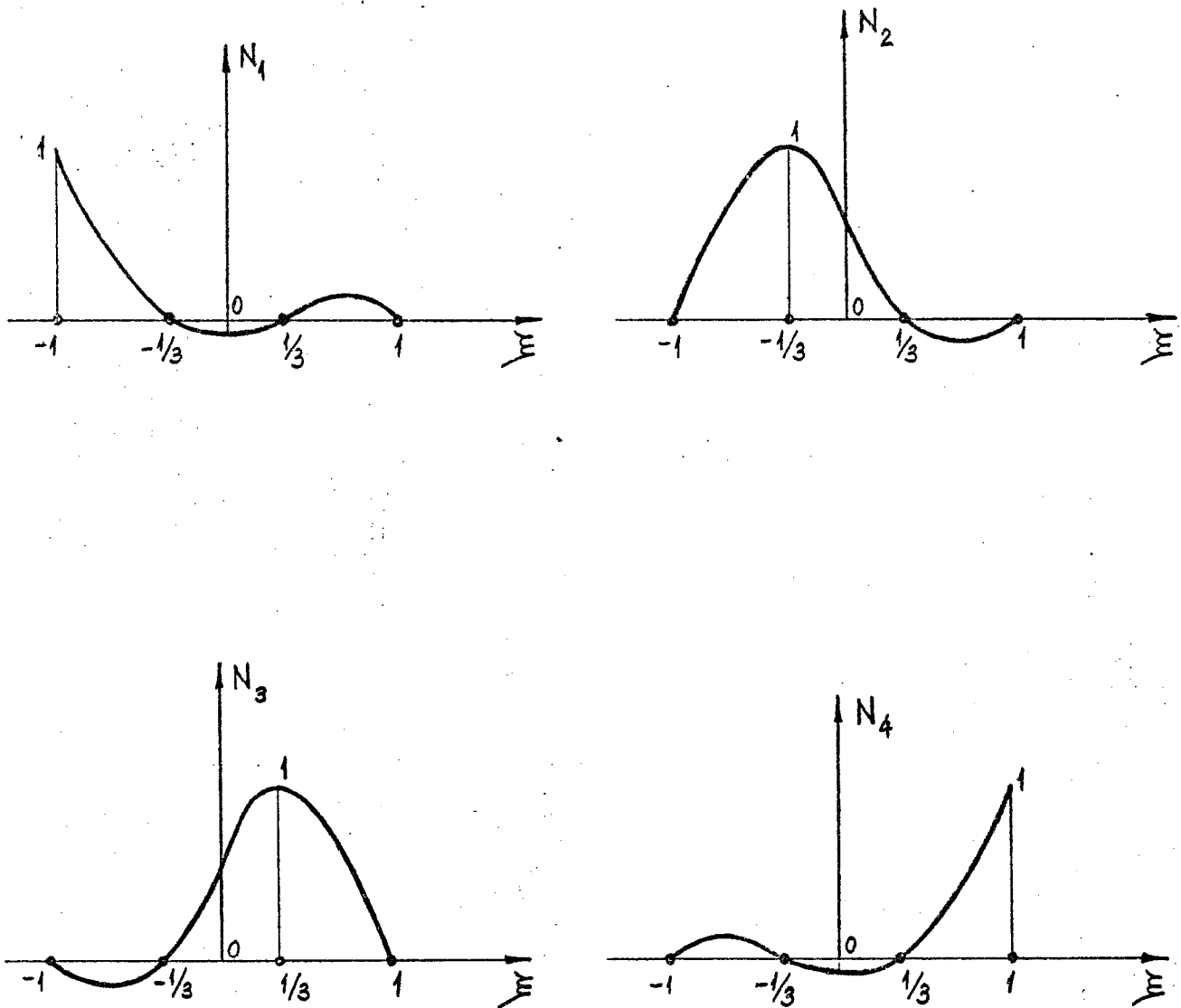


Figura 7.3. Elemento con cuatro nudos.

La matriz de rigidez y cargas equivalentes tiene la siguiente expresión:

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} 236,8 - 182,4\mu & 302 - 220,8\mu & 86,4 - 38,4\mu & 20,8 \\ & 691,2 - 259,2\mu & 475,2 & 86,4 + 38,4\mu \\ & & 691,2 + 259,2\mu & 302,4 + 220,8\mu \\ & & & 236,8 + 182,4\mu \end{bmatrix} \frac{EA}{64l}$$

simétrica

{7.16}

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} q_l$$

llevando a cabo la condensación estática de los grados de libertad de los nudos intermedios (2 y 3) se obtienen los siguientes parámetros:

$$\bar{k} = 1 - \frac{5\mu^2}{15 - 4\mu^2}$$

{7.17}

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15 - 4\mu^2)}$$

que coinciden con los deducidos a partir del hiperelemento C^1 de los nudos (tabla 7.1). Es decir, la importancia en la aproximación de estos parámetros dependen del grado de los polinomios completos que aparecen en las funciones de forma.

8. ELEMENTOS COMPUESTOS

Se puede considerar un elemento simple constituido por varios subelementos. La técnica de cálculo de su matriz de rigidez consiste en obtener la matriz de rigidez de cada uno de los subelementos y componerlos de acuerdo con las reglas del cálculo matricial. Finalmente, mediante condensación estática se eliminan los nudos intermedios. Esto, se lleva a cabo asimismo con las cargas aplicadas.

Es decir, para cada uno de los dos subelementos - de la figura 8.1, supuestos de igual luz, se tiene:

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{k}^{(1)} \quad \text{y} \quad \underline{k}^{(2)} = \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{k}^{(2)}$$

La matriz general del elemento 132 es:

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} \bar{k}^{(1)} & 0 & -\bar{k}^{(1)} \\ 0 & \bar{k}^{(2)} & -\bar{k}^{(2)} \\ -\bar{k}^{(1)} & -\bar{k}^{(2)} & \bar{k}^{(1)} + \bar{k}^{(2)} \end{bmatrix} \frac{2EA}{l}$$

Eliminando el nudo 3 por condensación estática se deduce

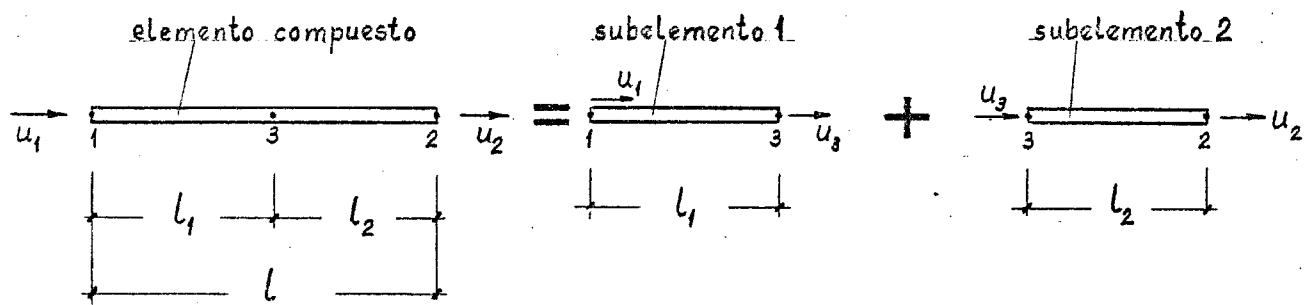


Figura 8.1. Elemento compuesto de subelementos simples.

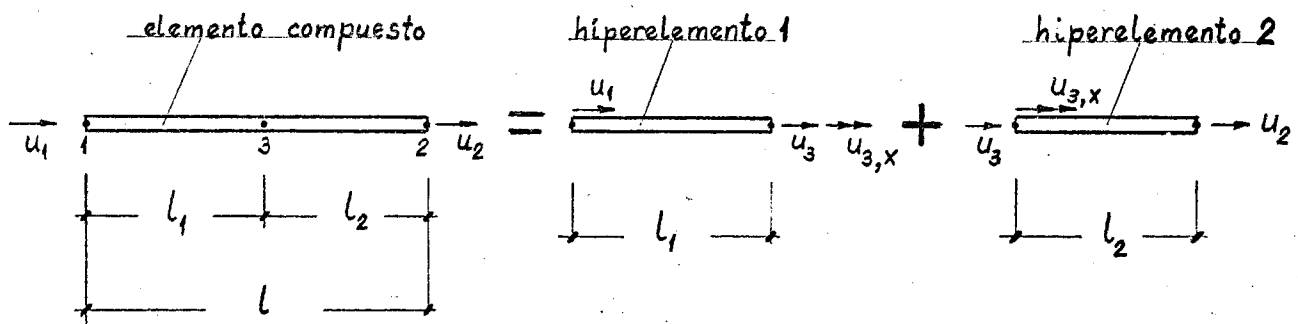


Figura 8.2. Elemento compuesto de hiperelementos.

$$\underline{k} = \frac{EA}{I} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{k}$$

$$\text{con } \bar{k} = \frac{2}{\frac{1}{\bar{k}(1)} + \frac{1}{\bar{k}(2)}} \quad \{8.1\}$$

Del mismo modo, se procede con las cargas equivalentes:

$$\underline{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{p}^{(1)} \\ \bar{p}^{(1)} \end{bmatrix} q \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \underline{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{p}^{(2)} \\ \bar{p}^{(2)} \end{bmatrix} q \frac{1}{2}$$

La carga en el elemento total es:

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} 1 - \bar{p}^{(1)} \\ \bar{p}^{(2)} \\ \bar{p}^{(1)} + 1 - \bar{p}^{(2)} \end{bmatrix} q \frac{1}{2}$$

y tras la eliminación del nudo 3, se obtiene:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} q l$$

$$\text{con } \bar{p} = \frac{\bar{k}}{4} \left(\frac{1}{\bar{k}(1)} + \frac{\bar{p}(1)}{\bar{k}(1)} + \frac{\bar{p}(2)}{\bar{k}(2)} \right) \quad \{8.2\}$$

A continuación, se exponen algunos ejemplos de aplicación de las formulas generales {8.1} y {8.2} que se acaban de deducir.

8.1. Subelementos simples

En el caso de dos subelementos simples iguales se tiene:

$$k^{(1)} = \frac{2EA^{(1)}}{1} = (2-\mu) \frac{EA}{1}, \quad k^{(2)} = \frac{2EA^{(2)}}{1} = (2+\mu) \frac{EA}{1}$$

con lo que los parametros del elemento son:

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{4} \mu^2 \quad \{8.3\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{8}$$

que pueden verse sus valores en la tabla 4.2.

Estas matrices pueden ser utilizadas de nuevo - para determinar mediante el mismo proceso, unos valores - mas refinados de los parametros anteriores.

Resulta, entonces

$$k^{(1)} = \frac{2EA^{(1)}}{1} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \overline{\mu^{(1)}}^2 \right\}, \text{ con } A^{(1)} = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)A, \mu^{(1)} = \frac{\mu}{2-\mu}$$

$$k^{(2)} = \frac{2EA^{(2)}}{1} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \overline{\mu^{(2)}}^2 \right\}, \text{ con } A^{(2)} = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)A, \mu^{(2)} = \frac{\mu}{2+\mu}$$

con lo que operando se obtienen los parametros

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(80 - 9\mu^2)}{16(16 - 5\mu^2)} \quad \{8.4\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(80 - 9\mu^4)}{32(16 - 5\mu^2)}$$

Estos resultados pueden verse en la tabla {8.1}.

8.2. Subelementos hiperelementos condensados

Si se adoptan, como subelementos, hiperelementos de dos nudos (C^1) descritos por las formulas 7.4, una vez condensada su matriz de rigidez y cargas, resulta aplicando {8.1} y {8.2}:

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(400 - 180\mu^2 + 3\mu^4)}{1200 - 860\mu^2 + 72\mu^4}$$

Tabla 8.1. Elemento compuesto de cuatro subelementos simples.

(Dos elementos compuestos de dos simples).

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(80 - 9\mu^2)}{16(16 - 5\mu^2)} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(80 - 9\mu^2)}{32(16 - 5\mu^2)}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.971	0.948	0.918	0.878	0.829	0.768	0.692	0.607
\bar{p}	0.500	0.516	0.532	0.547	0.562	0.577	0.591	0.605	0.618	0.630	0.640
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.002	0.004	0.008	0.012	0.022	0.040	0.081	0.233
$\Delta\bar{p}$	0.000	-0.001	-0.002	-0.004	-0.008	-0.013	-0.021	-0.033	-0.052	-0.086	-0.176

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu^2(400 - 180\mu^2 + 3\mu^4)}{2(1200 - 860\mu^2 + 72\mu^4)} \quad \{8.5\}$$

Los valores de estos parametros se muestran en la tabla 8.2 y se comprueba su excelente aproximación.

De un modo analogo si se utilizan como matrices - de rigidez y cargas los correspondientes al elemento simple de tres nudo, deducidas en el apartado 6.3 a partir de las funciones de forma {6.6} se obtiene:

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(12 - \mu^2)}{12(3 - \mu^2)} \quad \{8.6\}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(12 - \mu^2)}{24(3 - \mu^2)}$$

Los resultados de estos parametros se muestran en la tabla 8.3.

8.3. Formulas generales

Los resultados de los apartados anteriores pueden ser generalizados en la siguiente forma.

Se definen los parametros del elemento total por los parametros $\bar{k}_n(\mu)$ y $\bar{p}_n(\mu)$, una vez realizados a partir

Tabla 8.2.

Elemento compuesto de dos hiperelementos condensados

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(400 - 180\mu^2 + 3\mu^4)}{1200 - 860\mu^2 + 72\mu^4} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(400 - 180\mu^2 + 3\mu^4)}{2(1200 - 860\mu^2 + 72\mu^4)}$$

Errores absoluto: $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$

$\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.969	0.944	0.910	0.866	0.808	0.730	0.623	0.479
\bar{p}	0.500	0.517	0.534	0.551	0.570	0.590	0.612	0.637	0.668	0.709	0.763
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.012	0.105
$\Delta\bar{p}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.007	-0.053

Tabla 8.3.

Elemento compuesto de dos subelementos de tres nudos condensados.

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(12 - \mu^2)}{12(3 - \mu^2)} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(12 - \mu^2)}{12(3 - \mu^3)}$$

Errores absolutos: $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$

$\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.969	0.944	0.911	0.868	0.813	0.743	0.655	0.554
\bar{p}	0.500	0.517	0.534	0.551	0.570	0.589	0.610	0.634	0.660	0.692	0.725
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.006	0.015	0.044	0.180
$\Delta\bar{p}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.004	-0.010	-0.024	-0.091

de dos subelementos iniciales la operación de ensamblaje de matrices y eliminación del nudo central n veces.

Es decir, se conoce

$$\underline{k}_n(\mu) = \frac{EA}{I} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{k}_n(\mu)$$

$$\underline{p}_n(\mu) = \begin{bmatrix} 1 - \bar{p}_n(\mu) \\ p_n(\mu) \end{bmatrix} q_1$$

Se puede mostrar entonces, la siguiente formula general.

$$\bar{k}_{n+1}(\mu) = \frac{1}{\frac{1}{(2-\mu)\bar{k}_n(\frac{\mu}{2-\mu})} + \frac{1}{(2+\mu)\bar{k}_n(\frac{\mu}{2+\mu})}} \quad \{8.7\}$$

con $\bar{k}_0(\mu) = 1$ (elemento simple de dos nudos)

$\bar{k}_0(\mu) = 1 - \frac{1}{3} \mu^2$ (elemento simple de tres nudos)

$\bar{k}_0(\mu) = 1 - \frac{5\mu^2}{15-4\mu^2}$ (hiperelemento de dos nudos)

o bien, en forma directa:

$$k_{n+1}(\mu) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\alpha_{ni} \bar{k}_0(\frac{\mu}{\alpha_{ni}})}} \quad \{8.8\}$$

con $\alpha_{ni} = a_n(1+\mu) - 2i + 1$

$$a_n = 2^{2^n}$$

Por otra parte, se puede mostrar que $\bar{p}_n = \bar{p}_n(\mu)$ se relaciona con $\bar{k}_n(\mu)$ mediante la siguiente formula:

$$\bar{p}_n(\mu) = \frac{1}{2} - \frac{1 - \bar{k}_n(\mu)}{2\mu} \quad \{8.9\}$$

válida para todo μ y n .

8.4. Subelementos hiperelementos

Se puede realizar el proceso anterior de composición de subelementos en un elemento total, sin necesidad de utilizar subelementos simples o hiperelementos condensados. A falta de una formulación general, aquí solo se indica un ejemplo ilustrativo.

Se considera el hiperelemento de dos nudos y tres grados de libertad, definido por las funciones de forma -- {6.3} y se supone que se une a otro igual considerando comu nes los dos grados de libertad (figura 8.2).

La matriz de rigidez del subelemento 1 es:

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{2EA^{(1)}}{3l} \begin{bmatrix} 4-2\mu^{(1)} & -(4-2\mu^{(1)}) & \frac{1}{2}(1-\mu^{(1)}) \\ & (4-2\mu^{(1)}) & -\frac{1}{2}(1-\mu^{(1)}) \\ \text{simetrico} & & \frac{l^2}{4} \end{bmatrix}$$

y del subelemento 2

$$\underline{k}^{(2)} = \frac{2EA^{(2)}}{3l} \begin{bmatrix} 4+2\mu^{(2)} & -(4+2\mu^{(2)}) & \frac{1}{2}(1+\mu^{(2)}) \\ & 4+2\mu^{(2)} & -\frac{1}{2}(1+\mu^{(2)}) \\ \text{simetrico} & & \frac{l^2}{4} \end{bmatrix}$$

considerando que

$$A^{(1)} = A(1 - \frac{\mu}{2}) , \mu^{(1)} = \frac{\mu}{2-\mu}$$

$$A^{(2)} = A(1 + \frac{\mu}{2}) , \mu^{(2)} = \frac{\mu}{2+\mu}$$

la matriz de rigidez del elemento global es

$$\underline{k}^* = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 8-6\mu & 0 & -(8-6\mu) & l(1-\mu) \\ & 8+6\mu & -(8+6\mu) & -l(1+\mu) \\ & & 16 & 2l\mu \\ \text{simetrico} & & & l^2 \end{bmatrix} \quad \{8.10\}$$

y el vector de cargas equivalentes es:

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} q_l$$

La condensación estática conduce a:

$$\underline{k} = (\underline{k}_{bb} - \underline{k}_{ba} \underline{k}_{aa}^{-1} \underline{k}_{ab}) \frac{EA}{3l}$$

$$\underline{p} = (\underline{p}_b - \underline{k}_{ba} \cdot \underline{k}_{aa}^{-1} \underline{p}_b)$$

$$\text{con } \underline{k}_{aa} = \begin{bmatrix} 16 & 21\mu \\ 21\mu & 1^2 \end{bmatrix} \quad \underline{k}_{ab} = \underline{k}_{ba}^T = \begin{bmatrix} -(8-6\mu) & -(8+6\mu) \\ 1(1-\mu) & -1(1+\mu) \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_{bb} = \begin{bmatrix} 8-6\mu & 0 \\ 0 & 8+6\mu \end{bmatrix}$$

Resultan los parametros del elemento

$$\bar{k} = 1 - \frac{4\mu^2}{3(4-\mu^2)}$$

{8.12}

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu}{6(4-\mu^2)}$$

Tabla 8.4. Elemento compuesto de dos hiperelementos de 3 gdl.

$$\bar{k} = 1 - \frac{4\mu^2}{3(4 - \mu^2)}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{2\mu}{3(4 - \mu^2)}$$

Errores absolutos $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

μ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.99
\bar{k}	1.000	0.997	0.987	0.969	0.944	0.911	0.868	0.814	0.746	0.661	0.567
\bar{p}	0.500	0.517	0.534	0.551	0.569	0.589	0.610	0.633	0.659	0.688	0.719
$\Delta\bar{k}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.007	0.018	0.050	0.193
$\Delta\bar{p}$	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.001	-0.002	-0.005	-0.011	-0.028	-0.097

Estos resultados han sido representados en la tabla 8.4 y se comprueba la excelente exactitud obtenida. Son muy similares a los deducidos en la tabla 7.1 para el hiper elemento de dos nudos (4 gdl) condensado. En efecto la diferencia, entre ambos valores de \bar{k} es:

$$\Delta \bar{k} = \left\{ \left(1 - \frac{4\mu^2}{3(4-\mu^2)} \right) - \left(1 - \frac{5\mu^2}{15-4\mu^2} \right) \right\} = \frac{\mu^2}{180 - 93\mu^2 + 12\mu^4}$$

es decir $|\Delta k| < \frac{1}{87} = 0,011$ en $\mu \in (-1, 1)$

9. ELEMENTOS ESPECIALES

Existen otras técnicas de generación de matrices de elementos finitos, que no pueden ser incluidas en los apartados anteriores. De una de ellas, muy importante actualmente, se va a comentar con cierto detalle en los párrafos siguientes. Se hace referencia, a las técnicas de integración reducida y selectiva.

Con este objeto se considera el hiperelemento de dos nudos con cuatro grados de libertad (C^1), expuesto en 6.2.

Las funciones de forma de este elemento, ya dedu

cidos son:

$$N_1 = N_{10} = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)$$

$$N_3 = N_{20} = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi)$$

{9.1}

$$N_2 = N_{11} = \frac{1}{P}(1-\xi)^2(1-\xi)$$

$$N_4 = N_{21} = -\frac{1}{8}(1+\xi)^2(1-\xi)$$

La matriz de rigidez y vector de cargas son:

$$\underline{k}^* = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10}(1+\mu) & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}(1-\mu) \\ & \frac{1^2}{15}(2-\mu) & -\frac{1}{10}(1+\mu) & -\frac{1^2}{30} \\ & & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}(1-\mu) \\ \text{simétrico} & & & \frac{1^2}{15}(2+\mu) \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} q_1$$

{9.2}

que conducen a los parámetros del elemento, tras la condensación estática:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= 1 - \frac{5\mu^2}{15 - 4\mu^2} \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15 - 4\mu^2)}\end{aligned}\quad \{9.3\}$$

La evaluación de las integrales en el cálculo k_{ij} y p_i se puede llevar a cabo, alternativamente al procedimiento analítico exacto anterior, mediante las fórmulas de Gauss:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{k=h} w_k^{(h)} f\{\xi_k^{(h)}\}$$

Estas fórmulas permiten calcular exactamente integrales de polinomios de grado $2h-1$.

A continuación se realiza este cálculo para distintos valores de h .

1) Un solo punto de Gauss ($h=1$).

$$\xi_1^{(1)} = 0 \quad w_1^{(1)} = 1$$

resulta

$$k_{-1}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{1} & \frac{9}{4} & \frac{3}{8}l & -\frac{9}{4} & \frac{3}{8}l \\ & \frac{1}{16}l^2 & -\frac{3}{8}l & \frac{1}{16}l^2 & \\ & & \frac{9}{4} & -\frac{3}{8}l & \\ \text{simétrica} & & & \frac{1}{16}l^2 & \end{bmatrix} \quad \{9.4\}$$

$$p_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \{9.5\}$$

Los parámetros del elemento, calculados mediante esta integración reducidas, no se pueden obtener ya que la

$$\text{matriz } \underline{k}_{aa} = \begin{bmatrix} 1^2/16 & 1^2/16 \\ 1^2/16 & 1^2/16 \end{bmatrix}$$

es singular.

2) Dos puntos de Gauss (k=2)

$$\xi_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w_1^{(2)} = 1, \quad \xi_2^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w_2^{(2)} = 1$$

con lo que se deduce

$$\underline{k}_2^* = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} \mu & -1 & -\frac{1}{6} \mu \\ & \frac{1^2}{12} & -\frac{1}{6} \mu & -\frac{1^2}{12} \\ & & 1 & \frac{1}{6} \mu \\ \text{simetrica} & & & \frac{1^2}{12} \end{bmatrix} \quad \{9.6\}$$

$$\underline{p}_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix} q_1 = \underline{p}^* \quad \{9.7\}$$

Los parametros del elemento no son posibles tampoco de obtener en este caso, ya que

$$k_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{1^2}{12} & -\frac{1^2}{12} \\ -\frac{1^2}{12} & \frac{1^2}{12} \end{bmatrix}$$

es singular.

3) Tres puntos de Gauss (k=3)

$$\xi_1^{(3)} = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad w_1^{(3)} = \frac{5}{9}$$

$$\xi_2^{(3)} = 0, \quad w_2^{(3)} = \frac{8}{9}$$

$$\xi_3^{(3)} = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad w_3^{(3)} = \frac{5}{9}$$

Con estos valores se comprueba, como era de esperar, que la matriz de rigidez \underline{k}_3^* y el vector de cargas equivalentes \underline{p}_3^* son identicas a las expresiones exactas, es decir:

$$\underline{k}_3^* = \underline{k}^* \quad \text{y} \quad \underline{p}_3^* = \underline{p}^* = \underline{p}_2^*$$

En efecto, el grado máximo de los polinomios inte

grandes en el cálculo de k_{ij} es 5, con lo que $k=3$, es suficiente en el análisis.

Es posible utilizar una integración con aproximación diferente en ciertos coeficientes (integración selectiva), en particular, en los grados de libertad que se van a eliminar (2 y 4), usar tres puntos de Gauss y en los restantes 1 o 2. En esta situación, la matriz de rigidez -que se designará por \underline{k}_{13}^* o \underline{k}_{23}^* - deja de ser singular, lo que puede representar un serio inconveniente a efectos de convergencia, si no se lleva a cabo el proceso de condensación estático.

Se obtiene así:

$$\underline{k}_{13}^* = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{3}{8}l & -\frac{9}{4} & \frac{3}{8}l \\ & \frac{l^2}{15}(2-\mu) & -\frac{3}{8} & -\frac{l^2}{30} \\ & & \frac{9}{4} & -\frac{3}{8}l \\ \text{simetrico} & & & \frac{l^2}{15}(2+\mu) \end{bmatrix} \quad \{9.8\}$$

$$k_{23}^* = \frac{EA}{I} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu l}{6} & -1 & -\frac{\mu l}{6} \\ & \frac{l^2}{15}(2-\mu) & -\frac{\mu l}{6} & -\frac{l^2}{30} \\ & & 1 & \frac{\mu l}{6} \\ \text{simétrica} & & & \frac{l^2}{15}(2+\mu) \end{bmatrix} \quad \{9.9\}$$

$$p_{12}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} q_1 = p_1^* \quad \{9.10\}$$

$$p_{13}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix} q_1 = p_{23}^* = p_2^* \quad \{9.11\}$$

Los parametros del elemento se puede deducir por condensación de los anteriores matrices, así resulta:

A partir de la matriz k_{13}^*

$$\bar{k}_{13} = \frac{9}{4} \left\{ 1 - \frac{75}{4(15-4\mu^2)} \right\}$$

resultado inadmisibile, ya que $\bar{k}_{13} < 0$ para $\mu=0$

A partir de la matriz \underline{k}_{23}^*

$$\bar{k}_{23} = 1 - \frac{5\mu^2}{15-4\mu^2} \quad \{9.12\}$$

que constituye un resultado identico, al caso de integraci3n exacta en todos los elementos de la matriz (ecuaci3n 9.3), - lo que supone un ahorro importante en el esfuerzo de computaci3n.

A partir de \underline{p}_1^* y \underline{k}_{13}^*

$$\bar{p}_{113} = \frac{1}{2} + \frac{45\mu}{8(15-4\mu^2)} \quad \{9.13\}$$

A partir de \underline{p}_1^* y \underline{k}_{23}^*

$$\bar{p}_{123} = \frac{1}{2} + \frac{15\mu}{4(15-4\mu^2)} \quad \{9.14\}$$

A partir de \underline{p}_1^* y $\underline{k}_{33}^* = \underline{k}_3^* = \underline{k}^*$

$$\bar{p}_{133} = \frac{1}{2} + \frac{15}{4} \frac{\mu}{15-4\mu^2} = \bar{p}_{123} \quad \{9.15\}$$

Se comprueba que ahora como anteriormente no es preciso determinar k_{ba}^* con un número de puntos de Gauss mayor que 2, si bien, sus valores exactos se obtienen con -- tres puntos de Gauss.

A partir de \underline{p}_2^* y \underline{k}_{13}

$$\bar{p}_{213} = \frac{1}{2} + \frac{15}{4} \frac{\mu}{15-4\mu^2} \quad \{9.16\}$$

Es decir se puede integrar exactamente \bar{p}_2 (dos - puntos de Gauss) y \underline{k}_{ba} con solo 1 punto de Gauss. Naturalmente k_{aa}^{-1} debe de ser calculada exactamente, pues en otro caso seria singular.

A partir de \underline{p}_2^* y \underline{k}_{23}

$$\bar{p}_{223} = \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15-4\mu^2)} \quad \{9.17\}$$

es decir ($\bar{p}_{223} = \bar{p}$) coincide con la solución exacta.

Se comprende el interés que presenta desde un pun

to de vista computacional, el uso del número adecuado de - puntos de integración de Gauss, y la importancia que una - selección de este número según los términos de la matriz - de rigidez puede tener en la evaluación correcta de la condensación estática. Por otra parte, se muestra en (3), además de unos criterios de puntos de integración mínimos y - suficientes de convergencia, que una evaluación por defecto de la matriz de rigidez puede conducir a resultados mas exactos. En efecto, esta matriz seria mas flexible, que la deducida exactamente mediante elementos finitos, que al ser monotonicos son mas rígidos que los exactos. No obstante esta integración reducida tiene un limite, debido a la posibilidad de introducir movimientos espurios de solido rígido. Aquí solo se comentan estos aspectos en el ejemplo de prueba de este articulo, es decir en la barra a extensión.

10. CONCLUSIONES

En los apartados anteriores se ha planteado el - problema de la velocidad de convergencia del método de los elementos finitos en sus términos mas generales, indicando algunos de los numerosos parámetros de los que depende.

Con objeto de evitar la complicación algebraica - del método de los elementos finitos, que aparece en el tra

tamiento de problemas de dimensión y continuidad elevadas, se ha considerado en este estudio el caso mas simple de la columna recta (problema 1-D con continuidad C^0). Para este caso, solo se han estudiado los parametros caracteristicos del elemento que pueden influir en la velocidad de convergencia del cálculo, llevando a cabo un estudio numérico -- que intenta cubrir exahustivamente las posibilidades actuales. Sin embargo no se ha realizado ningún intento de resolver problemas importantes anejos, estrechamente relacionados con el aquí tratado, en especial:

a) Sistematización y nomenclatura de los distintos elementos. b) Generación automática de funciones de forma y matrices de rigidez y cargas equivalentes en familias de elementos. c) Optimización de mallas. Asimismo no se han considerado otros parámetros del elemento -matriz de resultados, matriz de masas consistentes, etc.- que pueden ser decisivos en la exactitud final de los resultados de un cálculo.

Con estas limitaciones, y de la observación de los valores numéricos de los parámetros de distintos elementos y su comparación con la solución exacta, se puede concluir:

- 1) En la exactitud de los resultados, es importante -elegir funciones de deformación (matriz B que relaciona deformaciones-movimientos) que permitan simular el mayor número de estados de deformación arbi

trarios. A este respecto, los criterios de deformación nula y constantes, necesarios para la convergencia podrían ser ampliados muy fácilmente, - con relación a la velocidad de convergencia en la siguiente dirección. Definida una base de funciones ortogonal sobre el elemento, el máximo número de las primeras funciones de esta base susceptibles de ser anuladas con mínimo de error podría ser un índice de la velocidad de convergencia.

- 2) Con referencia a la conclusión anterior, funciones de deformación discontinuas, constituidas por polinomios a trozos, pueden ser mas eficientes que funciones polinomicas de varios ordenes superior. Esta eficiencia crece, al dejar si es posible arbitrarias la posición de los distintos puntos de discontinuidad, es decir, de cambio de expresión polinomicas.
- 3) La importancia de las funciones de forma, queda relegada a estos efectos a cumplir los requerimientos de continuidad mínima. Sin embargo, en la comparación entre elementos conformes, la importancia estriba en el grado de las funciones de deformación o en general en la posibilidad de simular cualquier estado de deformación. Los ejemplos de elementos -- con funciones de forma parabolicas (apartado 6.3),

distintas conducian tras la condensación a identi-
cos resultados de la matriz de rigidez y cargas -
equivalentes.

- 4) Con relación a elementos compuestos, si los subele-
mentos son simples, se deducen valores de \bar{k} y \bar{p} mas
exactos si bien esta mejoría es extraordinariamente
mas lenta en comparación con la obtenida con sube-
lementos mas adecuados (simples obtenidos por con--
densación) o directamente hiperelementos de tres nu-
dos. Compararse a estos efectos los resultados del
apartado 8. Es decir, la complicación del cálculo --
(número de subelementos) no significa necesariamen-
te en mejor refinamiento en los resultados.
- 5) La importancia del procedimiento de integración nú-
merica no debe de ser disminuida. Existe ~~ceviden~~--
temente un número teórico de puntos de integración
que conduce a resultados exactos en \bar{k} y \bar{p} , y que -
por lo tanto, es ineficiente utilizar un número ma-
yor. Mas aun con un número de puntos inferior al -
teórico es posible obtener, a partir de matrices del
elemento total aproximadas, mediante condensación -
valores exactos de los parametros \bar{k} y \bar{p} . La experi-
mentación llevada a cabo en el capítulo 9 es revelaa-
dora a este respecto.

6) -En el curso de este estudio, se han obtenido varias formulas de caracter general, entre las que cabe -- destacar:

-Expresión de las funciones de forma en hiperelementos de K puntos y orden N.

-Obtención mediante recurrencia de las expresiones de las características de rigidez \bar{k} y cargas \bar{p} a partir de N subelementos.

-Matrices de rigidez y cargas de elementos simples con funciones de formas lineales a trozos. Caso - general de trozos iguales y desiguales. Asimismo en conexión con este problema, disposición de los nudos intermedios de modo que la matriz de rigidez sea optima.

Estos resultados representan un paso de la dirección de la generación automática de elementos finitos, objetivo imprescindible para la evaluación de la exactitud de - diferentes mallas.

El estudio aquí presentado, puede servir de pauta para llevar a cabo una experimentación numerica en otros --

problemas mas complejos. En especial, una etapa inmediata, aparte de la consideración de otros tipos de variación de la sección de la columna, corresponde al análisis de los -- elementos de flexión monodimensionales (1-D orden C^1), en donde la simulación de funciones de forma discontinuas del tipo de las usadas en (5) presenta un interés especial. La extensión a los elementos triangulares y rectangulares C^0 -existen algunas familias ya estudiadas actualmente- y C^1 , donde resultados generales son escasos, es el siguiente de safio que el analista en el método de los elementos finitos debe aceptar.

- (1) - M.I. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J. Topp.
"Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures" Journal of Aerospace Science. Vol. 23. num. 9, Setiembre (1956).
- (2) - A.K. Aziz, I. Babuska y otros "The Mathematical -- Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations" Academic Press. (1972).
- (3) - O.C. Zienkiewicz "El Metodo de los Elementos Finitos" Ed. Reverté S.A. (1979).
- (4) - B.M. Irons y K.J. Draper "Inadequacy of Nodal connections in a Stiffness Solution for Plate Bending. -- Journ. Am. Inst. Aeron. Astron. Vol. 3. Mayo (1965).
- (5) - R.W. Clough y C.A. Felippa "A refined Quadrilateral - Element for Analysis of Plate Bending. Proc. 2° Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Air Force Inst of Techn. Wright Patterson. Ohio (1968).
- (6) - R.L. Taylor "On completeness of shape functions for finite element analysis" Int. Journ. Num. Meth. Eng. 4. (1972).
- (7) - A. Samartín Quiroga "Aplicación del método de los elementos finitos al analisis estructural de tableros de

puentes". Universidad de Santander (1979).

- (8) - R.K. Livesley: "Matrix Methods of Structural Analysis" Pergamon Press (1975).
- (9) - W. Ritz "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations - Probleme der mathematischen Physik". J. Reine Angew. Math. 135 (1909).
- (10) - Y.K. Cheung, I.P. King y O.C. Zienckiewicz "Slab - bridges with arbitrary shape and support conditions: a general method of analysis based on finite elements". Proc. Inst. Civil Engis. Vol. 40. Londres Mayo (1968).
- (11) - A. Samartín y J. Munro "Dynamic Analysis of Translational Shells" Concrete Structures Technical Report CSRT 67/2. Imperial College. Londres Octubre (1967).
- (12) - E.L. Wilson. "Solid SAP" Structural Engineering Laboratory. Universidad de California Berkeley. Marzo (1972).
- (13) - A. Samartín y J. Diaz del Valle "Análisis de la flexión de placas mediante hiperelementos finitos de orden elevado". Hormigón y Acero. (A aparecer).